N° d'Ordre

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES MATHEMATIQUES

présentée

A L'UNIVERSITE PARIS VI

PAR

M. CHEVALLIER Dominique

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

VARIETES DE BANACH ET MECANIQUE ANALYTIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Soutenue le 4 JUIN 1973 1973 devant la Commission Examen

M. LICHNEROWICZ . . . . . Président

Mme BLANCHETON . . . . . }
Mme CHOQUET-BRUHAT . . . . . } Examinateurs
M. AVEZ . . . . . }

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548005_0023

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES MATHEMATIQUES

présentée
A L'UNIVERSITE PARIS VI

PAR

M. CHEVALLIER Dominique

pour obtenir
le grade de Docteur Es-Sciences

VARIETES DE BANACH ET MECANIQUE ANALYTIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Proposition de Thèse donnée par l'Université :

ESPACES DE POISSON DES GROUPES LOCALEMENT COMPACTS

Soutenue le 1973 devant la Commission d'Examen

M. LICHNEROWICZ . . . . . Président

Mme BLANCHETON . . . . . } Examinateurs
Mme CHOQUET-BRUHAT . . . . . }
M. AVEZ . . . . . }

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

En terminant la rédaction de cette thèse, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur André Lichnerowicz pour m'avoir encouragé dans la poursuite de ce travail et avoir bien voulu une faire l'honneur de le patronner, honneur auquel je suis particulièrement sensible.

Je tiens aussi à exprimer ma grande reconnaissance à Madame Blancheton qui m'a éclairé de ses conseils tout au long de ce travail et, en me guidant vers certains aspects de la mécanique analytique, m'a permis d'obtenir des résultats.

Je remercie également Madame Choquet-Bruhat pour avoir bien voulu lire cette thèse et participer au Jury.

Monsieur Avez, en choisissant mon second sujet, m'a donné l'occasion d'un contact enrichissant avec une branche des mathématiques nouvelle pour moi et je l'en remercie très sincèrement.

Le Département de Mathématiques Pures de l'Université de Caen a accepté de prendre en charge la dactylographie et la reproduction du texte, il trouvera ici l'expression de mes remerciements sincères et qui vont tout particulièrement à Mademoiselle Dubois et à Madame Quiquemelle pour leur excellent travail de dactylographie.

INTRODUCTION ET RESUME

La traduction de certaines Théories physiques, en particulier de la mécanique des milieux continus(*), en des termes géométriques analogues à ceux qui permettent d'exprimer la Dynamique analytique classique a donné lieu ces dernières années à un certain nombre de Travaux (nous citons à ce propos(**) ARNOLD, Mme BLANCHETON, EBIN and MARSDEN, MARSDEN dont les articles figurent dans la bibliographie). Ces extensions de la dynamique analytique classique dans lesquelles les espaces des configurations sont non plus des variétés différentielles de dimension finie mais des variétés de Banach conduisent, si l'on veut atteindre un certain niveau de généralité, à deux genres de difficultés.

Les difficultés du premier genre proviennent de la forme habituelle des problèmes d'évolutions dans les espaces de Banach - équations aux dérivées partielles - forme qui en définitive se prête assez mal à une traduction en termes géométriques de recherche d'intégrales d'un champ de vecteurs dans le seul cadre des structures de variétés différentielles. L'expression d'un tel problème est souvent : "V et W étant deux espaces de Banach

$j : V \longrightarrow W$ une injection linéaire continue d'image dense dans W et

$A : U \longrightarrow W$ un opérateur linéaire ou non de domaine U ouvert de V,

déterminer l'application $u : (0,T) \longrightarrow V$ telle que

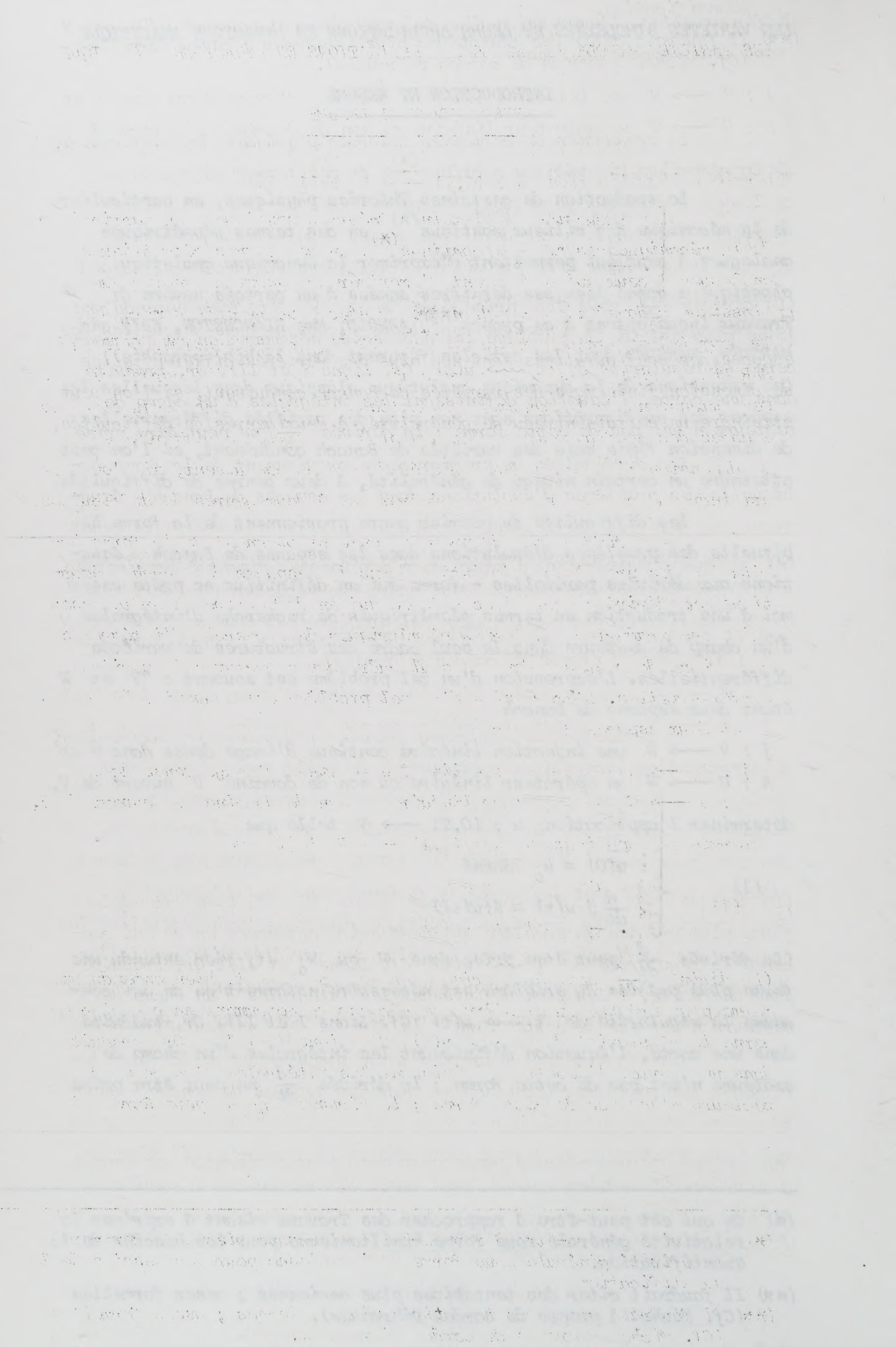
$$(1) \qquad \begin{cases} \cdot\ u(0) = u_o \quad \text{donné} \\ \cdot\ \dfrac{d}{dt}\, j\, u(t) = A(u(t)) \end{cases}$$

(La dérivée $\frac{d}{dt}$ peut être prise dans W ou W_σ et, bien entendu une forme plus précise du problème est nécessaire notamment en ce qui concerne la régularité de $t \rightsquigarrow u(t)$ Cf. Lions I et II). Or, traduite dans une carte, l'équation définissant les intégrales d'un champ de vecteurs n'est pas de cette forme ; la dérivée $\frac{d}{dt}$ ne peut être prise

---

(*) Ce qui est peut-être à rapprocher des Travaux visant à exprimer la relativité générale sous forme hamiltonienne pour les besoins de la quantification.

(**) Il faudrait citer des tentatives plus anciennes ; assez formelles (Cf. Michal à propos de cardes vibrantes).



que selon la Topologie du modèle de la variété c'est-à-dire V.
On voit ainsi que, même si l'on se réduit au cas "plat" où U est un ouvert d'un espace de Banach, l'expression intrinsèque de (1) dans les seuls termes de la structure de variété différentielle de U peut se révéler problématique ; la traduction de (1) dans une carte quelconque de U autre que $id_U : U \longrightarrow V$ n'est en général pas possible.
Le champ de vecteurs avec domaines de définition restreint et leurs intégrales, utilisés par MARSDEN, ne paraissent pas échapper à cette objection.

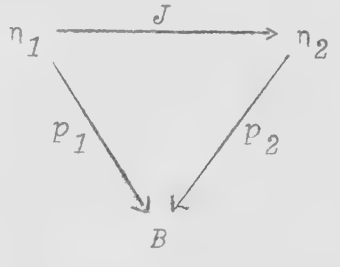
Les difficultés du second genre sont liées aux structures symplectiques. Il est bien connu que l'espace cotangent d'une variété de Banach dont le modèle est réflexif admet une structure symplectique canonique, propriété qui est fondamentale en dynamique hamiltonienne. La réflexivité du modèle peut fort bien n'avoir pas lieu ; un exemple est fourni par l'espace des configurations d'un fil inextensible qui est une variété modelée dans un espace de fonctions à dérivées L^∞. Le développement de la dynamique hamiltonienne peut ainsi être entravé et, dans ce cas la Théorie de MARSDEN n'apporte pas de solutions.

De telles difficultés paraissent signifier que la seule structure de variété différentielle est inadaptée à la formulation géométrique des certains problèmes physiques concernant des systèmes à une infinité de degrés de liberté, et conduisent en vue d'une telle formulation à introduire des structures plus fines que la structure de variété différentielle. Ces structures, qui peuvent être considérées comme des structures additionnelles sur des variétés de Banach, seront appelées variétés bimodelées dans la suite. Avant d'entreprendre une description résumée de ce Travail, notons que l'introduction des variétés bimodelées permet à elle seule de surmonter la première des difficultés signalée plus haut et, sous des conditions larges, la seconde difficulté. Il convient sans doute de remarquer que ces structures permettent d'user en géométrie différentielle de Topologies d'espaces localement convexes - par exemple des Topologies affaiblies d'espaces de Banach ou des Topologies faibles de duals d'espaces de Banach - sans pour autant faire appel à la délicate extension du calcul différentiel aux applications d'un espace localement convexe dans un autre et aux variétés modelées dans des espaces localement convexes.

CHAPITRE I.

On étudie d'abord dans la paragraphe 1 certains fibrés vectoriels dont les fibres sont des espaces localement convexes. Cela conduit à la mise en évidence de deux classes : les fibrés de classe $\mathcal{C}$ et les fibrés de classe $\mathcal{D}$ que le foncteur de dualité applique l'une dans l'autre. Ces deux classes sont définies de façon naturelle à partir des propriétés d'hypocontinuité de l'application canonique d'évaluation $\mathcal{L}(E,F) \times E \longrightarrow F$ où E et F sont des espaces localement convexes, propriétés qui conduisent aux conditions de régularité des applications de transition. Cette étude de fibrés plus généraux que les fibrés de Banach paraît nécessaire au moins pour pouvoir définir des dérivations dans des Topologies de duals faibles, des fibrés vectoriels affaiblis et duals faibles de fibrés de Banach, notions utiles en mécanique analytique (et dans l'expression géométrique générale du problème (1) si l'on dérive dans W_σ).

On introduit ensuite la notion de δ-fibré vectoriel : schématiquement un δ-fibré vectoriel est un couple (η_1,η_2), "localement trivial", de fibrés vectoriels de même base B et pour lequel existe une injection J vérifiant $p_1 = p_2 \circ J$ et qui applique linéairement et continument $p_1^{-1}(m)$ sur un sous-espace dense de $p_2^{-1}(m)$ pour chaque $m \in B$.



Dans le paragraphe 2, on définit puis on étudie systématiquement les propriétés des variétés bimodelées. Les variétés bimodelées sont définies, de façon analogue aux variétés différentielles, par recollement d'ouverts d'espaces de Banach avec des applications différentiables particulières que nous appellerons applications bidifférentiables : pour être plus précis si l'on a deux espaces de Banach V_1 et V_2, deux espaces localement convexes $j_1 : V_1 \longrightarrow W_1$ et $j_2 : V_2 \longrightarrow W_2$ alors $f : U \longrightarrow V_2$ (U ouvert $\subseteq V_1$) est bidifférentiable si :

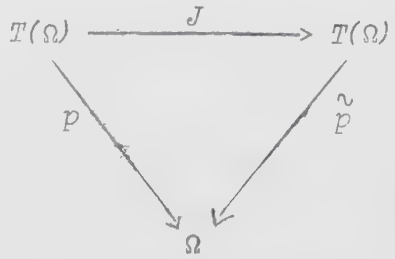
1°) f est de classe $\mathcal{C}^1$,

2°) $\forall x \in U$ il existe $f'(x) \in \mathcal{L}(W_1,W_2)$ telle que $f'(x) \circ j_1 = j_2 \circ f'(x)$.

Si j_1 et j_2 sont des inclusions cela signifie qu'en chaque point $x \in U$ $f'(x)$ admet un prolongement $f'(x) \in \mathcal{L}(W_1,W_2)$.

Les variétés bimodelées forment une catégorie dont les morphismes sont les applications bidifférentiables ; applications qui, localement s'expriment par une application ayant les propriétés 1°) et 2°). En un certain sens une structure de variété bimodelée est une structure additionnelle sur une variété de Banach.

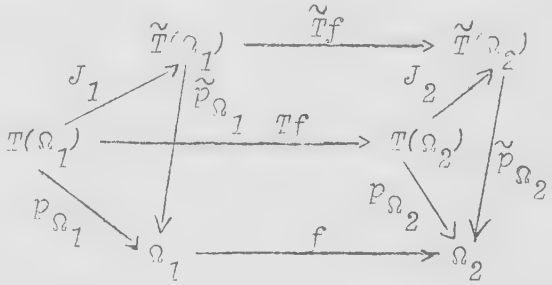
La première propriété importante d'une variété bimodelée Ω est d'admettre un δ-fibré tangent formé du couple $(\mathcal{T}(\Omega), \widetilde{\mathcal{T}}(\Omega))$ où le premier fibré vectoriel est le fibré tangent, qui s'identifie au fibré tangent à la variété différentielle sous-jacente, le second fibré est dit pseudo-tangent et ses fibres peuvent être des espaces localement convexes généraux.



$$\mathcal{T}(\Omega) = (T\Omega, p, \Omega),\ \widetilde{\mathcal{T}}(\Omega) = (\widetilde{T}\Omega, \widetilde{p}, \Omega)$$

Une variété bimodelée admet donc en chaque point m deux modèles, le premier est isomorphe à l'espace tangent en m $T_m\Omega = p^{-1}(m)$, le second est isomorphe à l'espace pseudo-tangent $\widetilde{T}_m\Omega = \widetilde{p}^{-1}(m)$ et il existe une injection linéaire continue et d'image dense du premier espace dans le second.

Si Ω_1 et Ω_2 sont des variétés bimodelées et si $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ est une application bidifférentiable, il existe deux applications Tf et $\widetilde{T}f$ tangente et pseudo-tangente à f telle que le diagramme ci-contre commute.



Il résulte de ces propriétés que sur la variété bimodelée Ω il est possible de définir :

- *des champs de vecteurs : sections du fibré vectoriel $\mathcal{T}(\Omega)$,*
- *des champs de pseudo-vecteurs : sections du fibré vectoriel $\widetilde{\mathcal{T}}(\Omega)$. et si l'on étudie les arcs $f : I \longrightarrow \Omega$ sur Ω (I intervalle de $\mathbb{R}$) on peut définir intrinsèquement,*
- *les arcs différentiables pour lesquels existent $Tf : I \longrightarrow T\Omega$ et $\widetilde{T}f = J \circ Tf : I \longrightarrow \widetilde{T}\Omega$,*
- *les arcs pseudo-différentiables pour lesquels seul $\widetilde{T}f$ existe ; localement ces arcs sont définis par des applications $f : I \longrightarrow V$*

telles que $\frac{d}{dt} j \circ f : I \longrightarrow W$ existe où V (resp. : W) est le premier (resp. : second) modèle de Ω, j l'expression locale de $J : T\Omega \longrightarrow \tilde{T}\Omega$. $\frac{d}{dt} f$ peut ne pas exister (ce qui est le cas intéressant). On est ainsi en mesure de formuler géométriquement un problème d'évolution de la forme (1) : Trouver les arcs pseudo-différentiables intégrales d'un champ de pseudo-vecteurs sur Ω et vérifiant une condition initiale c'est-à-dire

$$f : (0,T) \longrightarrow \Omega$$

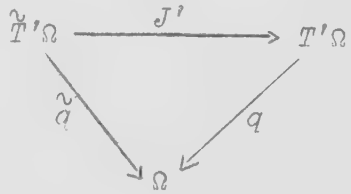
$$f(0) = m_0 \in \Omega$$

$$\tilde{T}f(t) = X(f(t)) \qquad t \in]0,T[, \qquad X : \Omega \longrightarrow \tilde{T}\Omega$$

La fin du §2 (n° 7) est consacrée à l'étude du "second fibré tangent" à une variété bimodelée (le cas classique est traité dans C. GODBILLON). L'espace tangent $T\Omega$ d'une variété bimodelée admet une structure canonique de variété bimodelée et l'on met en évidence par exemple

- deux "champs de vecteurs canoniques de Liouville" $\mathbb{V}$ et $\mathbb{W}$, sections de $\mathcal{C}(T\Omega)$ et de $\mathcal{C}(\tilde{T}\Omega)$ respectivement.
- deux "endomorphismes verticaux" ν et $\tilde{\nu}$ pour $\mathcal{C}(T\Omega)$ et $\mathcal{C}(\tilde{T}\Omega)$ respectivement.
- deux espèces de formes semi-basiques correspondant respectivement aux fonctions $F : \tilde{T}\Omega \longrightarrow T'\Omega$ telles que $q \circ F = \tilde{p}$ et $D : \tilde{T}\Omega \longrightarrow \tilde{T}'\Omega$ telles que $\tilde{q} \circ D = \tilde{p}$.

(Par dualité, le δ-fibré tangent d'une variété bimodelée donne un δ-fibré $(\tilde{\mathcal{C}}'(\Omega), \mathcal{C}'(\Omega))$ avec $\tilde{\mathcal{C}}'(\Omega) = (\tilde{T}'\Omega, \tilde{q}, \Omega)$ $\mathcal{C}'(\Omega) = (T'\Omega, q, \Omega)$).



Toutes ces notions joueront un rôle en mécanique analytique comme nous allons le voir plus loin.

Dans le paragraphe 3, on étudie l'espace cotangent d'une variété bimodelée (espace sous-jacent du dual du fibré pseudo-tangent) et l'on obtient deux résultats :

- d'une part, cet espace pseudo-cotangent admet des structures naturelles de variétés bimodelées (propriété qui paraît assez remarquable),

- d'autre part, il existe deux formes canoniques de Liouville.

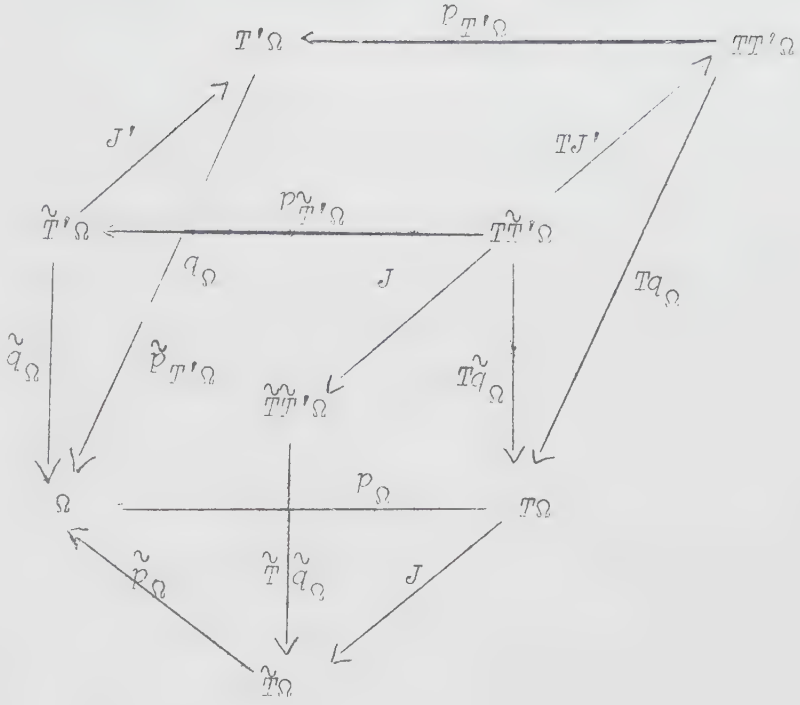
$\ell_o : TT'\Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \rightsquigarrow \langle p_{T'\Omega} u, Tqu \rangle$

$\ell_1 : \tilde{T}\tilde{T}'\Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \rightsquigarrow \langle \tilde{p}_{\tilde{T}'\Omega}, u, \tilde{T}\tilde{q}u \rangle$

telle que

$$\ell_o = \ell_o \circ TJ' = \ell_1 \circ J_{\mathcal{M}} \quad (*)$$

définisse une forme canonique sur $\tilde{T}'\Omega$ *des propriétés de* ℓ *permettent de mettre en évidence une structure, dite pseudo-symplectique, sur* $\tilde{T}'\Omega$ *qui joue le rôle de la structure symplectique canonique de l'espace cotangent en théorie classique. En effet, il existe une section unique du fibré*



$$\mathfrak{L}(\tilde{\mathcal{C}}(\tilde{T}'\Omega), \mathcal{T}(\tilde{T}'\Omega); \mathbb{R})$$

telle que pour $u_1, u_2 \in T\tilde{T}'\Omega$: $d\ell(u_1, u_2) = S(J_{\mathcal{M}} u_1, u_2)$ *et l'on démontrer que si le second modèle d'une variété bimodelée est un espace réflexif alors l'application*

$$S_b : V \rightsquigarrow S(V, \cdot) \in \mathcal{L}(\mathcal{C}(\tilde{T}'\Omega); \mathbb{R})$$

détermine un isomorphisme de $\tilde{\mathcal{C}}(\tilde{T}'\Omega)$ *sur* $\mathcal{C}'(\tilde{T}'\Omega)$.

Précisons que la structure pseudo-symplectique de l'espace pseudo-cotangent d'une variété bimodelée existe sans que le modèle de la variété sous-jacente soit réflexif, cela permet un développement satisfaisant de la dynamique hamiltonienne pour des systèmes dont l'espace des configurations est une variété dont le modèle n'est pas réflexif mais qui admet une structure bimodelée dont le second modèle est réflexif.

Le paragraphe 4 est consacré à l'exposé sous une forme abstraite assez générale de la dynamique analytique des systèmes à une infinité de degrés de liberté dont l'espace des configurations est une variété bimodelée. Afin de permettre de faire le lien avec les cas concrets, on pose d'abord un énoncé affaibli (dans le sens habituel de cet adjectif en théorie des équations aux dérivées partielles) du principe des "puissances virtuelles"(**). Cet énoncé est valable sous des hypothèses assez larges quant à la régularité a priori du mouvement étudié.

(*) *L'indice* $\mathcal{M}$ *représente un foncteur permettant de construire la structure bimodelée de* $\tilde{T}'\Omega$.

(**) *Ou bien "des travaux virtuels".*

Un système mécanique sur une variété bimodelée Ω *est déterminé par*

- *L'Energie Cinétique* $\mathbb{K} : \tilde{T}\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
- *La puissance des forces appliquées*(*) *représentée par une forme semi-basique de première espèce sur* $\tilde{T}\Omega$ $\mathcal{Q} : T\tilde{T}\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

On établit d'abord l'équivalence du principe des Travaux virtuels et de l'équation de Lagrange généralisée : dans une carte c, *si* V *(resp. :* W*) est le premier (resp. : second) modèle de l'espace des configurations, et* $j : V \longrightarrow W$ *l'expression locale de* J, *le mouvement est représenté par l'application faiblement pseudo-différentiable* $q : t \rightsquigarrow q(t) \in V$ *telle que :*

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\,(t_j\, \partial_2 \mathbb{K}_c(q,\dot{q})) - \partial_1 \mathbb{K}_c(q,\dot{q}) = \mathcal{Q}_c(q,\dot{q}) \qquad (q \equiv q(t),\ \dot{q} \equiv \dot{q}(t))$$

où $\mathbb{K}_c : V\times W \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{Q}_c : V\times W \longrightarrow V'$ *sont les expressions locales de* K *et* $\mathcal{Q}$ *dans* c, $\dot{q}(t) = \frac{d}{dt}\, jq(t)$ *dans* W_σ ; *la dérivée* $\frac{d}{dt}$ *du premier membre étant prise dans* V' *faible.*

Dans le cas des mouvements continument différentiables l'équation (2) se réduit à l'équation de Lagrange usuelle sur la variété de Banach sous-jacente à la variété bimodelée Ω.

Le système mécanique $(\mathbb{K},\mathcal{Q})$ *sur* Ω *satisfait à la condition de dualité (resp : dualité forte) si la "transformation de Legendre"* $D : \tilde{T}\Omega \longrightarrow \tilde{T}'\Omega$ *définie par*

- $\tilde{q} \circ D = \tilde{p}$
- $D^* \mathfrak{L} = d_v K$ *(dérivée verticale de* K*)*

est un difféomorphisme (resp : un isomorphisme) de $\tilde{\mathcal{C}}(\Omega)$ *sur* $\tilde{\mathcal{C}}'(\Omega)$.

Dans ces conditions, le second modèle de Ω *est nécessairement réflexif et, en appliquant la théorie des structures pseudo-symplectique du §3, on voit que les équations du mouvement équivalent à la recherche des intégrales du champ de pseudo-vecteurs* Y *sur la variété bimodelée* $\tilde{T}'\Omega$ *déterminé par*

$$S_b Y = - d H + F$$

avec

$$H = D^{-1*}(W.K - K) \qquad (W = \text{champ de Liouville sur } \tilde{T}\Omega)$$

$$F = D^{-1*}\mathcal{Q}$$

(*) *Cette puissance contient en particulier la puissance des efforts intérieurs.*

Localement la transformation de Legendre s'exprime par :

$$p = \partial_2 \mathbb{K}(q,\dot{q})$$

et les intégrales du champ de pseudo-vecteurs Y sont déterminées par les équations de Hamilton généralisées

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\, t_{jp} = -\partial_1 \mathbb{H}_c(q,p) + \mathbb{F}_c(q,p) \\ \dfrac{d}{dt}\, j\, q = i\, \partial_2 \mathbb{H}_c(q,p) \end{cases}$$

où $\mathbb{H}_c : V\times W' \longrightarrow R$, $\mathbb{F}_c : V\times W' \longrightarrow V'$ sont les expressions locales de $\mathbb{H}$ et $\mathbb{F}$ et $i : W'' \longrightarrow W$ l'isomorphisme canonique du bidual de l'espace réflexif W sur W. Les dérivées aux premiers membres de (3) sont prises dans V' faible et W affaibli.

Dans le paragraphe 5, on traite de l'existence de structures de variétés bimodelées sur les espaces de sections d'espaces fibrés différentiables. Dans sa conférence au Congrès de Nice en 1970, PALAIS a attiré l'attention sur l'importance en analyse non linéaire des structures additionnelles sur les espaces de sections et le caractère quelque peu mystérieux de leur apparition. Dans ce paragraphe, on montre que dans les cas classiques où un espace de sections admet une structure de variété de Banach, construite selon le procédé de PALAIS II, cet espace admet le plus souvent une structure de variété bimodelée. On met ainsi en évidence une large classe de variétés bimodelées (classe qui ne contient cependant pas les exemples - rencontrée en pratique - dont il sera question au chapitre II). Des développement plus complets de ce paragraphe sont concevables, notamment pour préciser les liens existant entre les opérateurs différentiels et les champs de pseudo-vecteurs dans le cadre d'une théorie géométrique des problèmes d'évolution.

CHAPITRE II et III.

On étudie d'abord quelques exemples de variétés bimodelées s'introduisant en dynamique des fils inextensibles, extensibles ou partiellement extensibles. Ce sont les difficultés rencontrées dans ces exemples, lorsqu'on souhaite traiter à ce propos de la dynamique hamiltonienne, qui nous ont conduit à introduire les variétés bimodelées. Il faut sans doute remarquer que l'espace des configurations d'un fil inextensible sans raideur est une variété de Banach dont le modèle est

l'espace des applications $X : I \longrightarrow \mathcal{E}$ où I est l'intervalle $(0,L)$ de $\mathbb{R}$, $\mathcal{E}$ un espace euclidien de dimension finie, telle que X est continue, X' (au sens des distributions) $\in L^{\infty}_{\mathcal{E}}(I)$ (*) et qu'il ne semble pas possible d'utiliser d'autres Topologies (pour la "convergence des dérivées") que celles d'espaces L^{∞} ; le modèle n'est donc pas réflexif. Cet exemple est aussi intéressant car l'on est en présence d'un espace des configurations qui n'est pas une variété plate et, il faut le constater, beaucoup d'exemples concrets donnés jusqu'ici en mécanique analytique des milieux continus concernent des espaces, des configurations réduits à des ouverts d'espaces de Banach. En réalité, on montre au §2, que l'espace des configurations d'un fil inextensible est une variété bimodelée dont le second modèle est réflexif et la dynamique analytique présentée sous forme abstraite au §4 du chapitre I s'applique intégralement à ces milieux continus. Cette application est présentée au chapitre III ainsi que diverses applications aux fils extensibles.

Au CHAPITRE IV, on traite d'un autre aspect de la dynamique des milieux continus curvilignes ; le milieu continu est cette fois considéré comme tridimentionnel et soumis à des liaisons internes. On applique à ces milieux continus, la théorie du chapitre I, §4, avec des espaces, des configurations du type décrit au chapitre I, §5.

( ) *Cf. D. CHEVALIER II.*

CHAPITRE I.

§1. δ-FIBRES-VECTORIELS

n° 1. Fibrés vectoriels dont les fibres sont des espaces localement convexes.

Nous allons examiner rapidement quelques-unes des particularités apparaissant dans l'étude des fibrés vectoriels dont les fibres sont des espaces localement convexes plus généraux que les espaces de Banach ; dans la suite, nous rencontrerons le cas des espaces de Banach ou duals d'espaces de Banach munis de topologies intermédiaires entre les topologies faibles et les topologies de Mackey. Tous les espaces localement convexes (e.l.c) considérés dans le §1 seront supposés construits sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et séparés. Les deux premières définitions suivantes sont des généralisations immédiates de celles que l'on pose dans l'étude des fibrés de Banach. Soient

(1) Γ une catégorie d'e.l.c. telle que :

. Si E et F sont des objets de Γ : $Mor(E,F) \subset \mathcal{L}(E,F)$.

(2) $\eta = (\mathcal{Y}, B, \pi)$ un triplet dans lequel $\mathcal{Y}$ est un ensemble, B un espace topologique séparé, $\pi : \mathcal{Y} \longrightarrow B$ une surjection

Définition 1. 1°) Dans les conditions (1) et (2), on appelle carte vectoriel de η, dans Γ tout triplet $c = (U, \emptyset, V)$ où U (domaine de c) est un ouvert de B, V un e.l.c. de Γ et $\emptyset : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times V$ une bijection telle que :

$$p_1 \circ \emptyset = \pi\Big|_{\pi^{-1}(U)} \qquad (p_1 : U \times V \longrightarrow U \text{ première projection})$$

Si $c_\alpha = (U_\alpha, \emptyset_\alpha, V_\alpha)$ $\alpha = 1,2$ sont des cartes vectorielles de η dans Γ avec $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ il existe deux applications

$$g_{21} : U_1 \cap U_2 \longrightarrow \{\text{bijections } V_1 \longrightarrow V_2\},$$

$g_{12} : U_1 \cap U_2 \longrightarrow \{\text{bijections } V_2 \longrightarrow V_1\}$, appelées applications de transition de c_1 à c_2 et de c_2 à c_1 respectivement, définies par :

$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(m,v) = (m, g_{21}(m)v)$, $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}(m,v) = (m, g_{12}(m)v)$ $m \in U_1 \cap U_2$. $g_{21}(m)$ et $g_{12}(m)$ sont des biiections inverses l'une de l'autre.

Définition 1. 2°) On dit que les cartes vectorielles c_1 et c_2 dans Γ sont compatibles si

- Soit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
- Soit pour tout $m \in U_1 \cap U_2$: $g_{21}(m) : V_1 \longrightarrow V_2$ est un isomorphisme de Γ et $g_{12}(m) : V_2 \longrightarrow V_1$ est l'isomorphisme inverse du précédent.

Si l'on souhaite, par exemple définir intrinsèquement les sections continues d'un fibré vectoriel, il convient d'imposer des conditions de régularité aux applications de transition $g_{21} : U_1 \cap U_2 \longrightarrow \mathcal{L}(V_1, V_2)$ et $g_{12} : U_1 \cap U_2 \longrightarrow \mathcal{L}(V_2, V_1)$; dans des conditions satisfaisantes, les applications telles $(m,v) \rightsquigarrow g_{21}(m)v$ de $(U_1 \cap U_2) \times V_1$ dans V_2 devraient être "continues". Or si E et F sont des e.l.c. non normables, il n'existe pas de G-topologie(*) sur $\mathcal{L}(E,F)$ telle que l'application canonique de $E \times \mathcal{L}_G(E,F)$ dans $F : (x,u) \rightsquigarrow u(x)$ soit continue. Par contre, la "continuité" de cette application a lieu dans le cadre des structures pseudo-topologiques ; de telles structures semblent donc devoir s'introduire naturellement en théorie des fibrés vectoriels dont les fibres sont des e.l.c. assez généraux. Soit ν décrivant un ensemble muni du filtre $\mathcal{F}$, supposons que $\lim_{\mathcal{F}} u_\nu = u$ dans $\mathcal{L}_G(E,F)$ et $\lim_{\mathcal{F}} x_\nu = x$ dans E, l'exercice 7, §4, chap. III, Bourbaki III montre que si l'une des conditions

- Il existe $X \in \mathcal{F}$ tel que $\{u_\nu | \nu \in X\}$ est une partie équicontinue de $\mathcal{L}(E,F)$,
- Il existe $X \in \mathcal{F}$ et $M \in G$ tels que $\{x_\nu | \nu \in X\} \subset M$,

a lieu : $\lim_{\mathcal{F}} u_\nu(x_\nu) = u(x)$ dans F.

Ce sont ces deux conditions que nous allons utiliser pour définir deux classes intéressantes de fibrés vectoriels. Introduisons d'abord quelques notations :

(3) Soient Γ une catégoire d'e.l.c. comme en (1) et G un foncteur de Γ dans la catégorie des ensembles tel que :

- $G(E)$ est un recouvrement de E formé de parties bornées.
- Si E et F sont des e.l.c. de Γ et si $u \in Mor(E,F)$ alors $u(G(E)) \subset G(F)$

(*) $\mathcal{L}_G(E,F)$ est ici l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ muni de la G-topologie au sens de Bourbaki III.

(le morphisme $G(u)$ s'obtient donc par extension canonique de u aux parties de $G(E)$). Par exemple $G(E)$ peut être l'ensemble des parties bornées, compactes de E, ou bien des parties équicontinues de E si Γ est formée de duals d'e.l.c. Si besoin est, on peut toujours supposer $G(E)$ saturé par les homothéties, les sommes et réunions finies et le passage à l'enveloppe équilibrée.

Définition 2. Soient B un espace topologique **séparé**, E et F deux e.l.c. de Γ et $f : B \longrightarrow Mor(E,F)$ ($\subset \mathcal{L}(E,F)$).

1°) On dit que f est de classe $\mathcal{C}_G$ si

(a) f est continue de B dans $\mathcal{L}_G(E,F)$ (*)

(b) $\forall M \in G(E)$, $\forall m_o \in B$, $\exists N \in G(F)$ et $\mathcal{O}$ voisinage de m_o tels que :

$$f(m)M \subseteq N \text{ pour tout } m \in \mathcal{O}.$$

2°) On dit que f est de classe $\mathcal{H}_G$ si

(a) f est continue de B dans $\mathcal{L}_G(E,F)$.

(b) $\forall m_o \in B$, $\exists \mathcal{O}$ voisinage de m_o tel que $\{f(m) \mid m \in \mathcal{O}\}$ soit une partie équicontinue de $\mathcal{L}(E,F)$.

Remarques :

. Si G est le foncteur "ensemble des parties bornées" (b) signifie que $f(m)$ est localement borné dans $\mathcal{L}_G(E,F)$ lorsque m décrit décrit B et (c) entraîne (b).

. Si G est le foncteur "ensemblesdes parties bornées" et si de de plus E est infratonnelé (plus simplement bornologique ou bien tonnelé) alors les propriétés (b) et (c) sont équivalentes (Bourbaki III, §3, exercices 17) ; c'est le cas en particulier si Γ est formée d'espaces de Banach.

(4) Si f et g sont de classe $\mathcal{C}_G$ (resp : $\mathcal{H}_G$) et si $\alpha f(m) + \beta g(m) \in Mor(E,F)$ pour tout $m \in B$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{K}$) alors $\alpha f + \beta g$ est de classe $\mathcal{C}_G$ (resp : $\mathcal{H}_G$).

La démonstration de (4) est aisée, la propriété suivante est essentielle :

(*) Dans les conditions de (3) nous noterons $\mathcal{L}_G(E,F)$ ce que Bourbaki noterait $\mathcal{L}_{G(E)}(E,F)$.

(5) *Si* $f : B \longrightarrow Mor(E,F)$, $g : B \longrightarrow Mor(F,G)$ *sont des applications de classe* $\mathcal{C}_G$ *(resp :* $\mathcal{H}_G$*) alors l'application* $h : B \longrightarrow Mor(E,G) : m \rightsquigarrow g(m) \circ f(m)$ *est de classe* $\mathcal{C}_G$ *(resp :* $\mathcal{H}_G$*).*

Démonstration de (5). Condition (a).

Soient $m_o \in B$ *et* $M \in G(E)$, V *un voisinage de 0 dans* G, *il faut trouver* $\mathcal{O}$ *voisinage de* m_o *tel que* $m \in \mathcal{O} \Longrightarrow (g(m) \circ f(m) - g(m_o) \circ f(m_o))M \subset V$.

Soit W *un voisinage de 0 dans* G *tel que* $W+W \subset V$. *Supposons* f *et* g *de classe* $\mathcal{C}_G$, *il existe* $\mathcal{O}_1$ *voisinage de* m_o *et* $N \in G(F)$ *tels que :*

$$m \in \mathcal{O}_1 \Longrightarrow (f(m) - f(m_o))M \subset g(m_o)^{-1}(W) \quad \text{et} \quad f(m)M \subset N$$

il existe $\mathcal{O}_2$ *voisinage de* m_o *tel que*

$$m \in \mathcal{O}_2 \Longrightarrow (g(m) - g(m_o))N \subset W$$

donc si $m \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}$

$$(h(m) - h(m_o))M \subseteq (g(m)-g(m_o))\circ f(m)M + g(m_o)\circ(f(m)-f(m_o))M \subseteq W+W \subseteq V$$

Supposons f *et* g *de classe* $\mathcal{H}_G$, *comme* $f(m_o)M \in G(F)$ *il existe* $\mathcal{O}_1$ *tel que*

$$m \in \mathcal{O}_1 \Longrightarrow (g(m) - g(m_o)) \circ f(m_o)M \subset W$$

il existe $\mathcal{O}_2$ *tel que* $\{g(m) \mid m \in \mathcal{O}_2\}$ *soit une partie équicontinue de* $\mathcal{L}(F,G)$, *alors* $\bigcap_{m \in \mathcal{O}_2} g(m)^{-1}(W) = Z$ *est un voisinage de 0 dans* F

et il existe $\mathcal{O}_3 \subseteq \mathcal{O}_2$ *tel que*

$$m \in \mathcal{O}_3 \Longrightarrow (f(m) - f(m_o))M \subset Z \Longrightarrow g(m) \circ (f(m) - f(m_o))M \subset W$$

donc si $m \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_3 = \mathcal{O}$:

$$(h(m) - h(m_o))M \subseteq g(m) \circ (f(m)-f(m_o))M + (g(m)-g(m_o))\circ f(m_o)M \subseteq W+W \subseteq V$$

La vérifiaction des conditions (b) et (c) est immédiate.

Nous sommes maintenant en mesure de formuler les conditions de régularité des applications de transition dont il a été question plus haut.

Définition 2. 3°) *Deux cartes vectorielles* c_1 *et* c_2 *de* η *dans* Γ *sont dites* $\mathcal{C}_G$*-compatibles (resp :* $\mathcal{H}_G$*-compatibles) si*

- c_1 *et* c_2 *sont compatibles.*
- *Les applications de transition* $g_{21} : U_1 \cap U_2 \longrightarrow Mor(V_1, V_2)$ *et* $g_{12} : U_1 \cap U_2 \longrightarrow Mor(V_2, V_1)$ *sont de classe* $\mathcal{C}_G$ *(resp :* $\mathcal{H}_G$*) (lorsque* $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$*).*

Un atlas vectoriel (resp : de classe $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$*) de* η *est un ensemble de cartes vectorielles de* η *(dans* Γ*) deux à deux compatibles (resp :* $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$*-compatibles) et dont les domaines recouvrent* B.

Deux atlas vectoriels $\mathcal{A}_1$ *et* $\mathcal{A}_2$ *sont dits équivalentes (resp :* $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$*-équivalentes) si* $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ *est un atlas vectoriel (resp : de classe* $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$*). Une structure de fibré vectoriel (resp : de classe* $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$*) à fibres dans* Γ *sur* $\eta = (\mathcal{Y}, B, \pi)$ *est déterminée par une classe d'équivalence d'atlas vectoriels, ou, ce qui revient au même par un atlas vectoriel maximal. Dans la suite, on appellera "fibré vectoriel" un triplet* $\eta = (\mathcal{Y}, B, \pi)$ *muni d'une structure de fibré vectoriel et, cette structure étant fixée, les termes "carte de* η*" ou "carte vectorielle de* η*" et "atlas de* η*" ou "atlas vectoriel de* η*" (respectivement synonymes) seront employés sans plus de références à la structure définie sur* η *lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité.*

Remarque :

La terminologie commode "fibré vectoriel à fibrés dans Γ*" est cependant légèrement impropre. Les fibrés de* η *sont en fait des e.l.c. isomorphes à des e.l.c. de* Γ *; ce ne sont pas obligatoirement des objets de* Γ.

Structures d'e.l.c. et structures pseudo-topologiques sur les fibrés de η.

Si $\eta = (\mathcal{Y}, B, \pi)$, $m \in B$ *on notera* $\mathcal{Y}_m = \pi^{-1}(m)$ *(fibré de* m*), de plus, si* $(U, \emptyset, V)$ *est une carte vectorielle de* η *en* m *on notera* $\emptyset_m : \mathcal{Y}_m \longrightarrow V$ *la bijection* $p_2 \emptyset / \mathcal{Y}_m$. *Il est alors évident que l'on peut définir sur* $\mathcal{Y}_m$ *une structure d'e.l.c. unique telle que, pour toute carte* $(U, \emptyset, V)$ *de* η *en* m, $\emptyset_m$ *soit un isomorphisme de* $\mathcal{Y}_m$ *sur* V.

Le foncteur G *permet de définir sur chaque e.l.c.* V *de* Γ *une pseudo-topologie*(*) *dite* G*-pseudo-topologie de* V *selon le procédé suivant :*

(*) *Les espaces vectoriels pseudo-topologiques sont étudiés par exemple dans Frölicher and Bucher I.*

(6) *Soient* V *un e.l.c. de* Γ, $\mathcal{F}$ *un filtre sur* V. *Pour que* $\mathcal{F}$ *converge vers* 0 *pour la* G*-pseudo-topologie, il faut et il suffit que :*

1°) $\mathcal{F}$ *contienne un ensemble de* $G(V)$ *(supposé convenablement saturé)* .

2°) $\mathcal{F}$ *converge vers* 0 *dans l'e.l.c.* V.

(Si $G(V)$ *est saturé par les homothéties, les sommes et réunions finies, et le passage à l'enveloppe équilibrée , on vérifie bien que les filtres sur* V *ayant ces propriétés déterminent sur* V *une pseudo topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel et plus fine que le topologie d'e.l.c). On peut transporter sur* $\mathcal{Y}^{\nu}_{m}$ *les* G*-pseudo-topologies des espaces* $'$ *de* Γ *par les bijections* ϕ_m^{-1} ; *l'ensemble*

$$\overline{G}(\mathcal{Y}^{\nu}_{m}) = \{A \subset \mathcal{Y}^{\nu}_{m} \mid \phi_m(A) \in G(V)\}$$

est indépendant de la carte $c = (U,\phi,V)$ *de* η *en* m *(en effet, si* (U_1,ϕ_1,V_1) *et* (U_2,ϕ_2,V_2) *sont deux telles cartes et si* $\phi_{1m}(A) \in G(V_1)$ *alors* $\phi_{2m}(A) = g_{21}(m)\,\phi_1(A) \in G(V_2)$ *d'après (3)) par conséquent, on définit sur chaque* $\mathcal{Y}^{\nu}_{m}$ *une pseudo-topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel de* $\mathcal{Y}^{\nu}_{m}$ *par*

(6 bis) *Pour qu'un filtre* $\mathcal{F}$ *sur* $\mathcal{Y}^{\nu}_{m}$ *converge vers* 0 *pour la* $\overline{G}$*-pseudo-topologie, il faut et il suffit que :*

1°) $\mathcal{F}$ *contienne un ensemble de* $\overline{G}(\mathcal{Y}^{\nu}_{m})$,

2°) $\mathcal{F}$ *converge vers* 0 *dans l'e.l.c.* $\mathcal{Y}^{\nu}_{m}$.

Pour toute carte (U,ϕ,V) *de* η *en* m, ϕ_m *est alors un isomorphisme de* $\mathcal{Y}^{\nu}_{m}$ *muni de la* $\overline{G}$*-pseudo-topologie sur* V *muni de la* G*-pseudo-topologie.*

Nous allons maintenant montrer que si η *est de classe* $\mathcal{H}^{\nu}_{G}$ *on peut recoller les espaces topologiques* $\mathcal{Y}^{\nu}_{m}$, *par contre si* η *est de classe* $\mathcal{U}_G$ *on ne peut en général recoller que les espaces pseudo-topologiques* $\mathcal{Y}^{\nu}_{m}$.

Topologie d'un espace fibré de classe $\mathcal{H}_G$; *pseudo-topologie d'un espace fibré de classe* $\mathcal{U}_G$

Considérons d'abord une structure de fibré vectoriel de classe $\mathcal{H}_G$ *sur* $\eta = (\mathcal{Y},B,\pi)$

(7) 1°) *Il existe une topologie unique sur* $\mathcal{Y}$ *telle que pour toute carte vectorielle* $(U,\emptyset,V)$ *de* η, $\emptyset : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U\times V$ *est un homéomorphisme.*

2°) *Pour cette topologie* $\pi : \mathcal{Y} \longrightarrow B$ *est continue.*

Démonstration :

Compte tenu d'un résultat classique (Bourbaki I, chapitre I, §2, prop. 8) si l'on munit chaque $\pi^{-1}(U)$, *où* $c = (U,\emptyset,V)$ *est une carte de* η, *de la topologie transportée* $\mathcal{C}_c$ *par* $\emptyset^{-1}$ *de la topologie de* $U\times V$ *il suffit de montrer que pour deux cartes compatibles* $c_1 = (U_1, \emptyset_1, V_1)$, $c_2 = (U_2, \emptyset_2, V_2)$ *telles que* $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$:

- $\pi^{-1}(U_1\cap U_2) = \pi^{-1}(U_1)\cap\pi^{-1}(U_2)$ *est ouvert pour* $\mathcal{C}_{c_1}$ *et pour* $\mathcal{C}_{c_2}$.
- *Les topologies induites sur* $\pi^{-1}(U_1)\cap\pi^{-1}(U_2)$ *par* $\mathcal{C}_{c_1}$ *et* $\mathcal{C}_{c_2}$ *sont identiques.*

La première propriété est triviale, la seconde découle du fait que l'application de transition $(m,v) \rightsquigarrow (m, g_{21}(m)v)$ *est un homéomorphisme de* $(U_1\cap U_2)\times V_1$ *sur* $(U_1\cap U_2)\times V_2$ *si* g_{21} *et* g_{12} *sont de classe* $\mathcal{H}_G$ *(on utilise Bourbaki III, chap. III, §1, exercice 7)*

Considérons maintenant une structure de fibré vectoriel de classe $\mathcal{C}_G$ *sur* $\eta = (\mathcal{Y},B,\pi)$. *Soit* $\mathcal{F}$ *un filtre sur* $\mathcal{Y}$.

(8) *Si* $\pi(\mathcal{F})$ *converge vers* m_o *dans* B, *les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(α) *Il existe une carte vectorielle* $c = (U,\emptyset,V)$ *de* η *en* m_o *telle que* $p_2\,\emptyset(\mathcal{F})$ (*) *converge vers un point* v *dans* V *et contient un ensemble* $M\in G(V)$.

(β) *Pour toute carte vectorielle* $c = (U,\emptyset,V)$ *de* η *en* m_o, $p_2\,\emptyset(\mathcal{F})$ *converge vers un point* v *dans* V *et contient un ensemble* $M\in G(V)$.

De plus

(γ) *Dans les conditions* (α) *et* (β) *il existe* $v\in\mathcal{Y}_{m_o}$ *tel que pour toute carte vectorielle en* m_o : $\lim \emptyset(\mathcal{F}) = \emptyset(v)$ (*) *dans* $U\times V$.

(*) *Si* $m_o\in U$ *et* $\lim \pi(\mathcal{F}) = m_o$ *dans* B *alors* $\pi^{-1}(U)\in\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{F}$ *induit sur* $\pi^{-1}(U)$ *une base de* $\mathcal{F}$. $\emptyset(\mathcal{F})$ *désigne ici l'image par* $\emptyset$ *de cette base de filtre.*

Les filtres sur $\mathcal{Y}$ qui vérifient ces conditions pour un $m_o \in B$ (dépendant du filtre considéré) sont les filtres convergents, de limite v, pour une structure pseudo-topologique sur $\mathcal{Y}$ sous-jacente à la structure de fibré vectoriel de η (Démonstration aisée $G(V)$ étant supposé convenablement saturé). Pour démontrer que $(\alpha) \Longleftrightarrow (\beta)$, il suffit d'établir $(\alpha) \Longrightarrow (\beta)$. Soient $c_1 = (U_1, \phi_1, V_1)$ une carte en m_o telle que (α) ait lieu et $c_2 = (U_2, \phi_2, V_2)$ une carte quelconque en m_o ; par hypothèse, il existe $X \in \mathcal{F}$ et $M_1 \in G(V_1)$ tels que $p_2 \phi_1(X) \subset M_1$. D'après la propriété (b) de la définition 2, il existe $\mathcal{O}$ voisinage de m_o dans B et $M_2 \in G(V_2)$ vérifiant

$$(9)\quad g_{21}(m)\, M_1 \subset M_2 \text{ pour tout } m \in \mathcal{O}, \qquad \mathcal{O} \subset U_1 \cap U_2$$

$\pi^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{F}$ (puisque $(\mathcal{F})$ converge vers m_o), $Y = X \cap \pi^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathcal{F}$ et $\pi(Y) \subset \mathcal{O}$, d'après (9)

$$p_2 \phi_2(Y) = g_{21}(\pi Y)(p_2 \phi_1(Y)) \subset g_{21}(\mathcal{O})\, M_1 \subset M_2$$

Le filtre $p_2 \phi_2(\mathcal{F})$ contient donc M_2 si $p_2 \phi_1(\mathcal{F})$ contient M_1. Dans ces conditions :

$$(10)\quad g_{21}(m)v - g_{21}(m_o)v_1 = (g_{21}(m) - g_{21}(m_o))v + g_{21}(m_o)(v - v_1)$$

D'après la propriété (a) de da définition 2, le premier terme du second membre tend vers 0 suivant $\mathcal{F}$ (puisque v reste dans un ensemble de $G(V_1)$) il en va de même pour le second terme ; $p_2 \phi_2 \mathcal{F}$ converge vers $v_2 = g_{21}(m_o)v_1$ dans V_2 si $p_2 \phi_1 \mathcal{F}$ converge vers v_1 dans V_1. L'équivalence $(\alpha) \Longleftrightarrow (\beta)$ ainsi que l'assertion (γ) sont établies.

"Pseudo-topologie affaiblie sur $\mathcal{Y}$" (*).

Sur la fibre $\mathcal{Y}_m$ de η on peut définir la topologie affaiblie $\sigma(\mathcal{Y}_m, \mathcal{Y}'_m)$, pour toute carte (U, ϕ, V) en m, ϕ_m est alors un isomorphisme de l'e.l.c. $\mathcal{Y}_m$ sur V_σ. En général, ces topologies ne peuvent être recollées que η soit de classe $\mathcal{C}_G$ ou de classe $\mathcal{H}_G$. Par contre, on peut recoller des "pseudo-topologies affaiblies" si η est de classe $\mathcal{C}_G$; la construction résulte de

(11) Si η est un fibré vectoriel de classe $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{F}$ est un filtre sur $\mathcal{Y}$ tel que $\pi(\mathcal{F})$ converge vers m_o, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(*) Cette question sera reprise sous une autre forme dans le n° 6.

(α_σ) *Il existe une carte* $c = (U, \emptyset, V)$ *de* η *en* m_o *telle que* $p_2\, \emptyset(\mathcal{F})$ *converge vers un point* v *dans* V_σ *et contient un ensemble* $M \in G(V)$.

(β_σ) *Pour toute carte* $c = (U, \emptyset, V)$ *de* η *en* m_o, $p_2\, \emptyset(\mathcal{F})$ *converge vers un point* v *dans* V_σ *et contient un ensemble* $M \in G(V)$.

De plus :

(γ_σ) *Dans les conditions* (α_σ) *et* (β_σ) *il existe* $v \in \mathcal{Y}_{m_o}$ *unique tel que pour toute carte* $(U, \emptyset, V)$ *de* η : $\lim \emptyset(\mathcal{F}) = \emptyset(v)$ *dans* $U \times V_\sigma$.

Les filtres sur $\mathcal{Y}$ *qui vérifient ces conditions sont les filtres convergents vers* v *pour une structure pseudo-topologique sur* $\mathcal{Y}$ *dite structure pseudo-topologique affaiblie de* $\mathcal{Y}$.

L'équivalence $(\alpha_\sigma) \iff (\beta_\sigma)$ *s'établit comme l'équivalence* $(\alpha) \iff (\beta)$; *on termine la démonstration en remarquant que la continuité de* $g_{21}(m_o)$ *pour les topologies initiales de* V_1 *et* V_2 *entraîne la continuité de* $g_{21}(m_o)$ *pour les topologies affaiblies et en utilisant (10).*

Si η *est un fibré vectoriel de classe* $\mathcal{C}_G$ *les propriétés suivantes sont immédiates :*

(12) *Si* $c = (U, \emptyset, V)$ *est une carte vectorielle de* η *alors* $\emptyset : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times V$ *est un homéomorphisme d'espaces pseudo-topologiques pour les topologies initiales d'une part et les topologies affaiblies d'autre part.*

(13) $\pi : \mathcal{Y} \longrightarrow B$ *est une application continue pour les pseudo-topologies initiales ou affaiblies sur* $\mathcal{Y}$.

Catégorie des fibrés vectoriels de classe $\mathcal{C}_G$ *(resp :* $\mathcal{H}_G$*) à fibres dans* Γ.

Soient $\eta_i = (\mathcal{Y}_i, B_i, \pi_i)$ $i = 1, 2$ *deux fibrés vectoriels de classe* $\mathcal{C}_G$ *(resp :* $\mathcal{H}_G$*)*

$f : B_1 \longrightarrow B_2$ *une application continue.*

(14) *On dit que l'application* $h : \mathcal{Y}_1 \longrightarrow \mathcal{Y}_2$ *est un f-morphisme de* η_1 *dans* η_2 *si pour tout* $m \in B_1$ *il existe une carte* $c_1 = (U_1, \emptyset_1, V_1)$ *de* η_1 *en* m *et une carte* $c_2 = (U_2, \emptyset_2, V_2)$ *de* η_2 *en* $f(m)$ *avec* $f(U_1) \subset U_2$, *et une application* $h_{c_1 c_2} : U_1 \longrightarrow Mor(V_1, V_2)$ *de classe* $\mathcal{C}_G$ *(resp :* $\mathcal{H}_G$*) telle que :*

$$h_m = \emptyset^{-1}_{2f(m)} \circ h_{c_1 c_2}(m) \circ \emptyset_{1m} \qquad m \in U_1$$

(h_m *(resp :* $\emptyset_{1m}$, $\emptyset_{2f(m)}$*) = restriction de* h *(resp :* $p_2\emptyset_1$, $p_2\emptyset_2$*) à* $\pi_1^{-1}(m)$ *(resp :* $\pi_1^{-1}(m)$, $\pi_2^{-1}(f(m))$*).*

Si (14) a lieu pour un couple de cartes c_1 *et* c_2 *en* m *alors cette propriété est encore vraie pour tout couple de cartes telles que* $f(U_1) \subset U_2$ *(d'après (b)). Si* h *est un f-morphisme de* η_1 *dans* η_2 *on a les propriétés :*

(15) $\pi_2 \circ h = f \circ \pi_1$.

(16) $\forall m \in B_1 : h_m : \mathcal{Y}_{1m} \longrightarrow \mathcal{Y}_{2f(m)}$ *est une application linéaire continue pour les topologies initiales ou leurs topologies affaiblies ainsi que pour les pseudo-topologies.*

(17) .*h est continue de* $\mathcal{Y}_1$ *dans* $\mathcal{Y}_2$ *topologiques si* η_1 *et* η_2 *sont de classe* $\mathcal{H}_G$.

.*h est continue de* $\mathcal{Y}_1$ *dans* $\mathcal{Y}_2$ *pseudo-topologiques (forts ou faibles) si* η_1 *et* η_2 *sont de classe* $\mathcal{C}_G$

(18) *Si* $g_1 : \eta_1 \longrightarrow \eta_2$ *est un* f_1*-morphisme,* $g_2 : \eta_2 \longrightarrow \eta_3$ *est un* f_2*-morphisme alors* $g_2 \circ g_1 : \eta_1 \longrightarrow \eta_3$ *est un* $f_2 \circ f_1$ *morphisme.*

Les démonstration des propriétés (15) à (18) sont sans difficultés.

Avec la définition (14) des morphismes, les fibrés vectoriels, de classe $\mathcal{C}_G$ *à fibres dans* Γ *d'une part, et de classe* $\mathcal{H}_G$ *à fibres dans* Γ *d'autre part forment des catégories.*

Sections continues d'un fibré vectoriel à fibres dans Γ.

Définition : *Soit* $\eta = (\mathcal{Y}^e, B, \pi)$ *un fibré vectoriel de classe* $\mathcal{C}_G$ *(resp :* $\mathcal{H}_G$*)*

- *Une section continue de* η *est une section* $S : B \longrightarrow \mathcal{Y}^e$ *de* π $(\pi \circ S = id_B)$ *continue de* B *dans* $\mathcal{Y}^e$ *pseudo-topologique (resp : topologique).*
- *Si* η *est de classe* $\mathcal{C}_G$ *une section faiblement continue de* η *est une section de* π *continue de* B *dans* $\mathcal{Y}^e$ *muni de la pseudo-topologie affaiblie.*

(19) Pour que l'application $S : B \longrightarrow \mathcal{Y}^e$ *soit une section continue de* η *il faut et il suffit que pour tout* $m_o \in B$ *il existe une carte vectorielle* $c = (U, \emptyset, V)$ *de* η *en* m_o *et une application* $S_c : U \longrightarrow V$ *telle que :*

- $\emptyset \circ S(m) = (m, S_c(m)) \qquad m \in U$
- S_c *est continue de* U *dans* V *muni de la* G*-pseudo-topologie si* η *est de classe* $\mathcal{C}_G$.
  S_c *est continue de* U *dans* V *si* η *est de classe* $\mathcal{H}_G$.

Soient $c_1 = (U, \emptyset_1, V_1)$ *et* $c_2 = (U, \emptyset_2, V_2)$ *deux cartes de* η *de même domaine* U *si* S *est une section de* η, *les applications* $S_{c_1} : U \longrightarrow V_1$ *et* $S_{c_2} : U \longrightarrow V_2$ *qui représentent* S *dans* c_1 *et* c_2 *sont reliées par*

$$S_{c_2}(m) = g_{21}(m)\, S_{c_1}(m) \qquad m \in U$$

les propriétés de régularité de $g_{21} : U \longrightarrow \mathcal{L}(V_1, V_2)$, *application de classe* $\mathcal{C}_G$ *ou* $\mathcal{H}_G$ *montrent que si* S_{c_1} *vérifie la condition de continuité de (19), il en est de même pour* S_{c_2} *où* c_2 *est une carte quelconque de domaine* U.

Lorsque η *est de classe* $\mathcal{C}_G$ *des propriétés analogues valent pour la continuité faible.*

Les sections continues de η *forment un* K*-espace vectoriel et un* $\mathcal{C}(B)$*-module.*

n° 2. δ-Fibrés vectoriels et δ-couples de fibrés vectoriels.

Commençons par définir une notion qui jouera dans la suite un rôle essentiel.

Définition 3. 1°) *On appelle δ-couple d'e.l.c. tout triplet* $\Delta = (V,W,j)$ *où* V *et* W *sont des e.l.c. sur* K *et* $j : V \longrightarrow W$ *une injection linéaire continue.*

2°) *On appelle δ-couple strict d'e.l.c. tout δ-couple d'e.l.c.* (V,W,j) *tel que* $j(V)$ *soit dense dans* W.

La théorie des équations aux dérivées partielles fait un usage fréquent de cette notion V *et* W *étant des espaces de Banach avec* $V \subset W$ *et* j *l'inclusion.*

Voici deux autres exemples :

- *Soit* V *un e.l.c.* V_σ *l'espace vectoriel* V *muni de la topologie affaiblie* $\sigma(V,V')$ *alors* (V,V_σ,id) *est un δ-couple strict d'e.l.c.*
- *Soit* E *un e.l.c.,* E'_G *le dual de* E *muni d'une G-topologie,* E'_S *le dual de* E *muni de la topologie faible* $\sigma(E',E)$, *alors* (E'_G,E'_S,id) *est un δ-couple strict d'e.l.c.*

On peut définir des catégories de δ-couples d'e.l.c. de la manière suivante :

Soient Γ_1 *et* Γ_2 *des catégories d'e.l.c. ayant les propriétés (1) n° 1.*

$\dot{+}$ *une collection de δ-couples (resp : stricts)* $\Delta = (V,W,j)$ *où* V *est dans* Γ_1 *et* W *est dans* Γ_2.

(1) *Si* $\Delta_i = (V_i,W_i,j_i)$ $i = 1,2$ *sont dans* $\dot{+}$, $Mor(\Delta_1,\Delta_2)$ *est un ensemble de couples* (h,ℓ) *où* $\ell \in Mor(V_1,V_2)$, $\ell \in Mor(W_1,W_2)$ *et tels que*

$$\ell \circ j_1 = j_2 \circ h .$$

Des exemples naturels sont fournis par la catégorie de tous les δ-couples d'e.l.c. ($\Gamma_1 = \Gamma_2$ = *catégorie des e.l.c.*) *ou bien la catégorie des δ-couples d'espaces de Banach* ($\Gamma_1 = \Gamma_2$ = *catégorie des espaces de Banach avec pour morphismes les applications linéaires continues). Dans ces deux exemples, l'application* h *décrit* $\mathcal{L}(V_1,V_2)$ *et*

l'application ℓ décrit $\mathcal{L}(W_1, W_2)$, : avec les notations de (1); plus loin, nous rencontrerons des cas où il n'en est pas ainsi.

On définit sur les δ-couples d'e.l.c. des opérations naturelles, par exemple :

Dualité faible : Si $\Delta = (V, W, j)$ est un δ-couple strict alors $\Delta'_S = (W'_S, V'_S, {}^t j)$ est un δ-couple strict.

Dualité forte : Si $\Delta = (V, W, j)$ est un δ-couple strict alors $\Delta'_b = (W'_b, V'_b, {}^t j)$ est un δ-couple.

Remarques :

Si Δ n'est pas strict ${}^t j$ n'est pas injective.

Si Δ est strict ${}^t j(W')$ est dense dans V'_S mais ne l'est pas en général dans V'_b de sorte que $(W'_b, V'_b, {}^t j)$ n'est pas strict, pour cette raison la seule considération des δ-couple stricts peut être incommode. Cependant si V est réflexif, la topologie forte sur V'_b est compatible avec la dualité (V, V') et ${}^t j\, W'$ est ainsi dense dans V'_b de sorte que Δ'_b est strict.

δ-fibrés vectoriels.

Intuitivement, un δ-fibré vectoriel est obtenu en recollant des δ-couples d'e.l.c. attachés aux points d'un espace topologique (qui dans nos exemples, sera d'ailleurs une variété de Banach). Plus précisément, soit $\dot{+}$ une catégorie de δ-couples, formée à partir de Γ_1 et Γ_2 comme ci-dessus et dont les morphismes sont définis selon (1) et soit

(2) $\xi = (\mathcal{Y}^e, \mathcal{Y}^{ee}, B, \pi, \varpi, J)$ un destriplet où $\mathcal{Y}^e$ et $\mathcal{Y}^{ee}$ sont des ensembles, B un espace topologique, $\pi : \mathcal{Y}^e \longrightarrow B$ et $\varpi : \mathcal{Y}^{ee} \longrightarrow B$ deux surjections $J : \mathcal{Y}^e \longrightarrow \mathcal{Y}^{ee}$ une injection telle que $\varpi \circ J = \pi$.

Définition 4. 1°) On appelle δ-carte vectorielle de ξ dans $\dot{+}$ tout quadruplet $c = (U, \emptyset, \psi, \Delta)$ où U (domaine de c) est ouvert dans B, $\Delta = (V, W, j)$ est un objet de $\dot{+}$, $\emptyset : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times V$ et $\psi : \varpi^{-1}(U) \longrightarrow U \times W$ sont deux bijections et

- $p_1 \circ \emptyset = \pi/_{\pi^{-1}(U)}$, $p_1 \circ \psi = \varpi/_{\varpi^{-1}(U)}$,
- $\psi \circ J \circ \emptyset^{-1} = id_U \times j$.

Une δ-carte est dite stricte si Δ est strict.

Si $c = (U, \emptyset, \psi, \Delta)$ *est une* δ*-carte vectorielle de* ξ *alors* $c_V = (U, \emptyset, V)$ *et* $c_W = (U, \psi, W)$ *sont des cartes vectorielles de* $\eta_1 = (\mathscr{V}, B, \pi)$ *et* $\eta_2 = (\mathscr{W}, B, \varpi)$ *au sens de la définition 1.*

(3) *Soient* G_1 *et* G_2 *deux foncteurs de* Γ_1 *et* Γ_2 *respectivement dans la catégorie des ensembles et tels que :*

- G_1 *et* G_2 *ont les propriétés définies en (3) du n° 1.*
- *Si* $\Delta = (V, W, j)$ *est dans* $\dot{+}$ *alors* $j\, G_1(V) \subseteq G_2(W)$.

On pose $G = (G_1, G_2)$ *et l'on désignera souvent par* G *l'un quelconque des* G, G_1, G_2, *le contexte permettant immédiatement de rétablir la précision.*

Définition 4. 2°) *Deux* δ*-cartes vectorielles* $c_\alpha = (U_\alpha, \emptyset_\alpha, \psi_\alpha, \Delta_\alpha)$ $\alpha = 1, 2$ *sont compatibles (resp :* $\mathscr{C}_G$, $\mathscr{H}_G$*-compatibles) si*

- *Soit* $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

(4) - *Soit les cartes vectorielles*(*) c_{1V} *et* c_{2V} *d'une part,* c_{1W} *et* c_{2W} *d'autre part sont compatibles (resp :* $\mathscr{C}_G$, $\mathscr{H}_G$*-compatibles) au sens de la définition 1, et si*

$$g_{21} : U_1 \cap U_2 \longrightarrow Mor(V_1, V_2), \quad g_{12} : U_1 \cap U_2 \longrightarrow Mor(V_2, V_1)$$

$$h_{21} : U_1 \cap U_2 \longrightarrow Mor(W_1, W_2), \quad h_{12} : U_1 \cap U_2 \longrightarrow Mor(W_2, W_1)$$

sont les applications de transition de c_{1V} *à* c_{2V} *et de* c_{1W} *à* c_{2W} *respectivement :*

$\forall m \in U_1 \cap U_2$ $(g_{21}(m), h_{21}(m))$ *et* $(g_{12}(m), h_{12}(m))$ *sont des morphismes de* $\dot{+}$.

En particulier, on a les relations suivantes :

$$\forall m \in U_1 \cap U_2 : h_{21}(m) \circ j_1 = j_2 \circ g_{21}(m), \quad h_{12}(m) \circ j_2 = j_1 \circ g_{12}(m)$$

(j_α = *injection de* Δ_α).

(*) $c_{1V} = (U_1, \emptyset_1, V_1)$, $c_{2V} = (U_2, \emptyset_2, V_2)$, $c_{1W} = (U_1, \psi_1, W_1)$, $c_{2W} = (U_2, \psi_2, W_2)$.

On appellera δ-atlas vectoriel sur ξ (resp : de classe $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$) un ensemble de δ-cartes vectorielles de ξ (dans $\overline{+}$) deux à deux compatibles. (resp : $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$-compatibles) et dont les domaines recouvrent B. Deux δ-atlas vectoriels sur ξ sont dits équivalents (resp : $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$-équivalents) si leur réunion est un δ-atlas vectoriel (resp : de classe $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$). Une structure de δ-fibré vectoriel sur ξ à fibres dans $\overline{+}$ (resp : de classe $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$) est déterminée par une classe d'équivalence de δ-atlas vectoriels. Dans la suite, on appellera "δ-fibré vectoriel" un sextuplet ξ ayant les propriétés de la définition 4 et sur lequel est définie une structure de δ-fibré vectoriel.

Un δ-fibré vectoriel est dit strict en $m \in B$ s'il admet une δ-carte en m qui est stricte ; toutes les δ-cartes de ξ en m sont alors strictes d'après (4) et de plus ξ est strict en tout point de la composante connexe de m dans B. ξ est dit strict s'il est strict en tout point de B.

Si $\xi = (\mathcal{Y}, \mathcal{Y}', B, \pi, \varpi, J)$ est muni d'une structure de δ-fibré vectoriel dont $\mathcal{A}$ est un δ-atlas alors $\mathcal{A}_V = \{c_V \mid c \in \mathcal{A}\}$ et $\mathcal{A}_W = \{c_W \mid c \in \mathcal{A}\}$ sont des atlas vectoriels de $\eta_1 = (\mathcal{Y}, B, \pi)$ et $\eta_2 = (\mathcal{Y}', B, \varpi)$, on voit de plus que si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont des δ-atlas vectoriels équivalents de ξ alors $\mathcal{A}_{1V}$ et $\mathcal{A}_{2V}$ d'une part, $\mathcal{A}_{1W}$ et $\mathcal{A}_{2W}$ d'autre part sont équivalents donc :

(5) *Une structure de δ-fibré vectoriel sur $\xi = (\mathcal{Y}, \mathcal{Y}', B, \pi, \overline{\omega}, J)$ (resp : de classe $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$) détermine sur chacun des triplets $\eta_1 = (\mathcal{Y}, B, \pi)$ et $\eta_2 = (\mathcal{Y}', B, \varpi)$ une structure de fibré vectoriel (resp : de classe $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$).*

Les fibrés vectoriels η_1 et η_2 sont dits associés au δ-fibré vectoriel ξ. Dans les conditions de (5) on a :

(6) *Si ξ est de classe $\mathcal{C}_G$ (resp : $\mathcal{H}_G$) alors $J : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}'$ est un morphisme de η_1 dans η_2 au-dessus de B (c'est-à-dire un id_B-morphisme).*

En particulier, $J_m : \mathcal{Y}_m \longrightarrow \mathcal{Y}'_m$ est continue d'une part pour les topologies d'e.l.c., d'autre part pour les pseudo-topologies et :

(7) *$(\mathcal{Y}_m, \mathcal{Y}'_m, J_m)$ est un δ-couple strict $\Longleftrightarrow$ ξ est strict en m.*

Démonstration de (6) :

Prenons par exemple le cas où ξ est de classe $\mathscr{C}_G$, il faut établir que si $\mathfrak{F}$ est un filtre convergent dans $\mathscr{Y}$, $J(\mathfrak{F})$ converge dans $\mathscr{Y}'$. Si $\mathfrak{F}$ converge dans $\mathscr{Y}$ il existe $m \in B$ tel que $\lim \pi(\mathfrak{F}) = m$ et la relation $\varpi \circ J = \pi$ entraîne que $\lim \varpi J(\mathfrak{F}) = m$.

Soit alors $(U, \emptyset, \psi, \Delta)$ une δ-carte de ξ en m, $(U, \emptyset, V)$ est une carte de η_1, et, d'après l'hypothèse et (6)β du n° 1 $p_2 \emptyset(\mathfrak{F})$ contient un ensemble de $G(V)$ et converge dans l'e.l.c. V, d'après la définition 3 1°)

$$p_2 \psi(J\mathfrak{F}) = j\, p_2 \emptyset(\mathfrak{F})$$

Compte tenu de la seconde propriété (3), j étant linéaire et continue $p_2 \psi(J\mathfrak{F})$ contient un ensemble de $G(W)$ et converge dans l'e.l.c. W. On a ainsi établi que $J\mathfrak{F}$ vérifie (6)α du n° 1 et, par suite converge dans $\mathscr{Y}'$ pseudo-topologique.

δ-couples de fibrés vectoriels de base B.

Si l'on donne deux fibrés vectoriels $\eta_1 = (\mathscr{Y}, B, \pi)$, $\eta_2 = (\mathscr{Y}', B, \varpi)$ de même base et respectivement à fibrés dans Γ_1 et Γ_2, un morphisme injectif $J : \mathscr{Y} \longrightarrow \mathscr{Y}'$ au-dessus de B et une catégorie $\dot{+}$ de δ-couples d'e.l.c. comme en (1) on ne peut, en général mettre en évidence des atlas vectoriels $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ de η_1 et η_2 au-dessus d'un même recouvrement $\{U_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{I}\}$ de B et tel que (cf. (4) et définition 4. 1°)).

(8) $\mathscr{A}_1 = \{(U_\alpha, \emptyset_\alpha, V_\alpha) \mid \alpha \in \mathfrak{I}\}$, $\mathscr{A}_2 = \{(U_\alpha, \psi_\alpha, W_\alpha) \mid \alpha \in \mathfrak{I}\}$ et

. $\forall \alpha \in \mathfrak{I}$ $\psi_\alpha \circ J \circ \emptyset_\alpha^{-1} = id_{U_\alpha} \times j_\alpha$ $\quad j_\alpha \in \mathscr{L}(V_\alpha, W_\beta)$

. Si $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ $(g_{\beta\alpha}(m),\ h_{\beta\alpha}(m))$ est un morphisme de $\dot{+}$

(J est donc représenté dans chaque couple de cartes vectorielles de domaine U_α par une injection j_α indépendante de la fibre considérée).

Si l'on souhaite reconstituer un δ-fibré vectoriel "à partir des fibrés vectoriels associés η_1 et η_2" on est conduit à poser la définition suivante :

Définition 5 : Γ_1, Γ_2, $\dot{+}$, G_1, G_2 étant donnés comme en (1) et (3). Un δ-couple de fibrés vectoriels de base B (resp : de classe $\mathscr{C}_G$, $\mathscr{Y}_G$) est un triplet (η_1, η_2, J) où

. $\eta_i = (\mathscr{Y}_i, B, \pi_i)$ $i = 1, 2$ sont des fibrés vectoriels de base B, à

fibrés dans Γ_i (resp : de classe $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$).

- J est un morphisme injectif de η_1 dans η_2 au-dessus de B.
- Il existe un recouvrement ouvert $\{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{J}\}$ de B et deux atlas vectoriels $\mathcal{A}_i$ de η_i, $i = 1,2$, au-dessus de ce recouvrement et tels que (8) ait lieu.

On vérifie alors facilement qu'il y a "identité" entre la notion de δ-couple de fibrés vectoriels selon la définition 5 et la notion de δ-fibré vectoriel à fibrés dans Ξ.

En effet, si l'on considère deux atlas vectoriels vérifiant (8), alors

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha, \psi_\alpha, \Delta_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{J}\} \quad \text{où} \quad \Delta_\alpha = (V_\alpha, W_\alpha, j_\alpha)$$

est un δ-atlas vectoriel qui détermine sur $\xi = (\mathcal{J}^e_1, \mathcal{J}^e_2, B, \pi_1, \pi_2, J)$ une structure de δ-fibré dont les fibrés associés sont η_1 et η_2.

Inversement, on sait (4,5,6) que les fibrés associés à un δ-fibré vectoriel forment un δ-couple de fibrés vectoriels.

Remarques :

- Si (η_1, η_2, J) est un δ-couple de fibrés vectoriels, l'atlas maximal de η_1 et l'atlas maximal de η_2 ne vérifient pas en général (8), seuls certains couples $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ vérifient (8) et ce sont ces couples qui déterminent la structure de δ-fibré.

- Un δ-couple de fibrés vectoriels est strict, si, par définition, le δ-fibré qu'il détermine est strict ; pour cela, il faut et il suffit que dans (8) les Δ_α soient stricts.

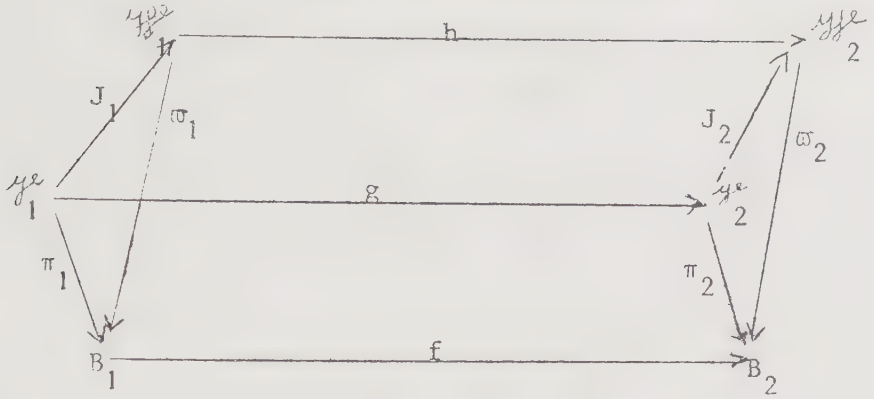
Morphismes de δ-fibrés vectoriels.

Les δ-fibrés vectoriels (resp : de classe $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$) forment une catégorie dont les morphismes sont définis par :

(9) Soient $\xi_i = (\mathcal{J}^e_i, \mathcal{J}^{e'}_i, B_i, \pi_i, \varpi_i, J_i)$ $i = 1,2$ des δ-fibrés vectoriels (resp : de classe $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$), ξ_{i1}, ξ_{i2} les fibrés vectoriels associés à ξ_i, $f : B_1 \longrightarrow B_2$ une application continue. Un f-morphisme de ξ_1 dans ξ_2 est un couple (g,h) où

- g est un f-morphisme de η_{11} dans η_{21}, h un f-morphisme de η_{12} dans η_{22}

. $h \circ J_1 = J_2 \circ g$; autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :



n° 3. Détermination des fibrés et δ-fibrés vectoriels par des applications de transition.

Afin de disposer de références pour la suite, décrivons sommairement cette construction pour un fibré vectoriel. Soit $\{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ un recouvrement ouvert de l'espace topologique séparé B, Γ une catégorie d'e.l.c. et G un foncteur comme au n° 1.

(1) Un cocycle(*) (resp : de classe $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$) sur B, subordonné au recouvrement $\{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ est déterminé par

. Une famille $\{V_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ d'e.l.c. de Γ,

. Une famille "d'applications de transition" $\{g_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{I},\ U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset\}$ où

$g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Iso(V_\alpha, V_\beta) (\subset \mathcal{L}(V_\alpha, V_\beta))$
(resp : est de classe $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$)

$g_{\gamma\beta}(m) \circ g_{\beta\alpha}(m) = g_{\gamma\alpha}(m)$ pour $m \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Les applications de transition d'un atlas vectoriel d'un fibré vectoriel à fibres dans Γ forment un cocycle. Inversement, un cocycle sur B détermine un fibré vectoriel de base B à une isomorphe près ; définissons la relation d'équivalence $\mathcal{R}_m$ sur $\bigcup_{\alpha \mid m \in U_\alpha} V_\alpha$ (pour $m \in B$) par

(2) $v_\alpha \equiv v_\beta \ (\mathcal{R}_m) \iff v_\alpha \in V_\alpha,\ v_\beta \in V_\beta$ et $v_\beta = g_{\beta\alpha}(m) v_\alpha$

Posons $\mathcal{H}$ = ensemble des couples (m, v) $m \in B$, v = classe d'équivalence

(*) Le terme "cocycle" défini selon (1) recouvre une notion un peu plus générale que dans son acception habituelle.

pour $\mathcal{R}'_m$ $\pi : \mathcal{Y}' \longrightarrow B : (m,v) \rightsquigarrow m$. Si $(m,v) \in \mathcal{Y}'_m = \pi^{-1}(m)$, pour tout $\alpha \in J$ tel que $m \in U_\alpha$ $v \cap V_\alpha$ est réduit à un unique élément v_α (représentant de v dans V_α) et les applications

$$(3) \qquad \phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times V_\alpha : (m,v) \rightsquigarrow (m,v_\alpha)$$

déterminent un atlas vectoriel $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha, V_\alpha) \mid \alpha \in \mathfrak{I}\}$ dans Γ sur $\eta = (\mathcal{Y}, B, \pi)$ dont les applications de transition sont les $g_{\alpha\beta}$ par construction. Cet atlas détermine une structure de fibré vectoriel de même classe que le cocycle donné. L'isomorphie de deux fibrés ayant même cocycle est immédiate.

Considérons maintenant deux catégories Γ_1 et Γ_2, deux foncteurs G_1 et G_2 et une catégorie $\dot{+}$ de δ-couples d'e.l.c. comme au n° 2.

<u>Proposition 1</u>. Soient $\{U_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{I}\}$ un recouvrement de B, $\{\Delta_\alpha = (V_\alpha, W_\alpha, j_\alpha) \mid \alpha \in \mathfrak{I}\}$ une famille de δ-couple d'e.l.c. de $\dot{+}$ et deux cocycles

$$g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Iso(V_\alpha, V_\beta), \quad h_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Iso(W_\alpha, W_\beta)$$

(resp : de classe $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$) et tels que

(I) $\forall m \in U_\alpha \cap U_\beta$ $(g_{\beta\alpha}(m), h_{\beta\alpha}(m))$ est un isomorphisme de $\dot{+}$.

Alors, il existe un δ-fibré vectoriel ξ de base B, à fibres dans $\dot{+}$ (resp : de classe $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$) dont un δ-atlas vectoriel admet les $g_{\beta\alpha}$ et $h_{\beta\alpha}$ pour applications de transition. ξ est strict si et seulement si les Δ_α le sont.

Remarquons que, d'après (4) du n° 2, les applications de transition d'un δ-atlas forment deux cocycles ayant la propriété (I). Pour établir la proposition on construit par le procédé décrit ci-dessus

- le fibré vectoriel $\eta_1 = (\mathcal{Y}, B, \pi)$ à partir du cocycle des $g_{\beta\alpha}$
- le fibré vectoriel $\eta_2 = (\mathcal{Y}', B, \varpi)$ à partir du cocycle des $h_{\beta\alpha}$

Avec des notations évidentes si $m \in B$: $v_\alpha \equiv v_\beta \ (\mathcal{R}'_m) \Longrightarrow j_\alpha v_\alpha \equiv j_\beta v_\beta \ (\mathcal{R}^2_m)$ d'après (I). On détermine donc un id_B-morphisme injectif $J : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}'$ de η_1 dans η_2 en posant

$J(m,v) = (m,w)$ si $w_\alpha = j_\alpha v_\alpha$ pour tout α tel que $m \in U_\alpha$

(v_α et w_α sont les représentants de v et w dans V_α et W_α). Les cartes vectorielles de η_1 et η_2 définies par ce procédé (3) vérifient les conditions de la définition 3. (η_1, η_2, J) est donc un

δ-couple de fibrés vectoriels, strict si les Δ_α le sont, et ce δ-couple détermine un δ-fibré à fibres dans $\overline{+}$ (n° 2).

n° 4. Dualité des fibrés vectoriels.

On considère une catégorie Γ, un foncteur G ayant les propriétés (1) et (3) du n° 1. Pour étudier la dualité des fibrés à fibres dans Γ nous utiliserons un lemme dont l'énoncé est donné plus bas.

Soient B un espace topologique séparé, E et F deux e.l.c. séparés de Γ.

$$f : B \longrightarrow Mor(E,F) \subset \mathcal{L}(E,F)$$

$$g : B \longrightarrow \mathcal{L}(F'_G, E'_G)$$

On considère les propriétés suivantes où $\mathcal{C}_q$ est le foncteur "ensemble des parties équicontinues" défini sur les duals d'e.l.c.

(a) f est continue de B dans $\mathcal{L}_G(E,F)$.

(b) $\forall M \in G(E)$ $\forall m_o \in B$ $\exists N \in G(F)$ $\exists \mathcal{O}$ voisinage de m_o tels que $f(m)M \subset W$ pour $m \in \mathcal{O}$.

(c) $\forall m_o \in B$ $\exists \mathcal{O}$ voisinage de m_o tel que $\{f(m) | m \in \mathcal{O}\}$ est une partie équicontinue.

(^{t}a) g est continue de B dans $\mathcal{L}_{\mathcal{C}_q}(F'_G, E'_G)$.

(^{t}b) $\forall m_o \in B$ $\exists \mathcal{O}$ voisinage de m_o tel que $\{g(m) | m \in \mathcal{O}\}$ est une partie équicontinue.

(^{t}c) $\forall M \in \mathcal{C}_q(F')$, $\forall m_o \in B$ $\exists N \in \mathcal{C}_q(E')$ $\exists \mathcal{O}$ voisinage de m_o tels que $g(m)M \subset N$ pour $m \in \mathcal{O}$.

Lemme 1°) Pour tout $m \in B$ $^t f(m) \in \mathcal{L}(F'_G, E'_G)$.

Si l'on désigne par $^t f : B \longrightarrow \mathcal{L}(F'_G, E'_G)$ l'application $m \longrightarrow {}^t f(m)$ alors

2°) f vérifie (a) (resp : (b), (c)) $\Longleftrightarrow$ $^t f$ vérifie (^{t}a) (resp : (^{t}b), (^{t}c)).

Démonstration :

On sait que les polaires dans E' (resp : F') des parties convexes équilibrées fermées(*) *de $G(E)$ (resp : $G(F)$) forment un système fondamental de voisinages de 0 dans E'_G (resp : F'_G), les polaires dans F' des voisinages convexes équilibrés fermés de 0 dans F forment un système fondamental de "parties équicontinues dans F'. Or si $X \subset E$ et $Y \subset F$ sont convexes équilibrés fermés :*

$$(1)\quad u(X) \subset Y \iff {}^t u(Y^\circ) \subset X^\circ \qquad (u \in \mathcal{L}(E,F))$$

Le 1°) découle de (1)(**) *où l'on prend $X \in G(E)$ puis Y (convexe équilibré fermé) $\in G(F)$ tel que $f(m)X \subset Y$ (cf. propriété (3) du n° 1). Le 2°) découle de l'équivalence*

$$\forall m \in \mathcal{O} \quad f(m)X \subset Y \iff \forall m \in \mathcal{O} \quad {}^t f(m) Y^\circ \subset X^\circ,$$

dans laquelle on prend Y voisinage quelconque de 0 et, X quelconque $\in G(E)$ pour établir $(a) \iff ({}^t a)$ ou bien X voisinage de 0 convenable pour établir $(c) \iff ({}^t c)$, X quelconque $\in G(E)$ et Y convenable $\in G(F)$ pour établir $(b) \iff ({}^t b)$.

Corollaire :

Soient $f : B \longrightarrow Mor(E,F)$, ${}^t f : B \longrightarrow \mathcal{L}(F'_G, E'_G)$
f est de classe $\mathcal{C}_G \iff {}^t f$ est de classe $\mathcal{HC}_q$.
f est de classe $\mathcal{H}_G \iff {}^t f$ est de classe $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_q}$.

Soient $\mathcal{F}V_0(B,\Gamma,G)$ la catégorie des fibrés vectoriels de base B, à fibres dans Γ et de classe $\mathcal{C}_G$.

Soient $\mathcal{F}V_1(B,\Gamma,G)$ la catégorie des fibrés vectoriels de base B, à fibres dans Γ et de classe $\mathcal{H}_G$.

Si $\{U_\alpha\}$, $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Mor(V_\alpha, V_\beta)$ est un cocycle sur B qui détermine un fibré η de $\mathcal{F}V_0(B,\Gamma,G)$ (resp : $\mathcal{F}V_1(B,\Gamma,G)$) on vérifie alors que :

(*) *On suppose $G(E)$ et $G(F)$ saturés par enveloppe convexe équilibrée fermée.*

(**) *Cette généralisation simple d'un résultat classique est conséquence du caractère fonctoriel de G.*

(2) $\{U_\alpha\}$ ${}^t g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathcal{L}(V'_{\alpha G}, V'_{\beta G})$ est un cocycle sur B qui détermine un fibré vectoriel η' de $\mathcal{F}V_1(B, \Gamma'_G, {}^t q)$ (resp : $\mathcal{F}V_0(B, \Gamma'_G, {}^t q)$), ou

(3) Γ'_G est la catégorie formée des e.l.c. V'_G avec V dans Γ et dont les morphismes sont les applications linéaires transposées des morphismes de Γ.

Définition :

Si η est un fibré vectoriel de classe $\mathcal{C}_G$ ou $\mathcal{H}_G$ le fibré vectoriel η' défini ci-dessus est appelé dual de η.

Proposition 2 :

Soient $\eta = (\mathcal{Y}, B, \pi)$ un fibré de classe $\mathcal{C}_G$ ou $\mathcal{H}_G$, $\eta' = (\mathcal{Y}', B, \chi)$ son dual.

1°) Il existe une application (canonique)

$$< . , . > : \mathcal{Y}' \underset{X}{}_B \mathcal{Y} \longrightarrow \mathbb{K} \quad (*)$$

bilinéaire continue sur chaque $\mathcal{Y}'_m \times \mathcal{Y}_m$ pseudo-topologique.

2°) Si $S : B \longrightarrow \mathcal{Y}$ et $S' : B \longrightarrow \mathcal{Y}'$ sont des sections continues alors l'application $m \rightsquigarrow < S'(m), S(m) >$ est continue de B dans $\mathbb{K}$.

Démonstration :

Soient $m \in B$, $v \in \mathcal{Y}_m$, $v' \in \mathcal{Y}'_m$, $c_\alpha = (U_\alpha, \emptyset_\alpha, V_\alpha)$ et $c'_\alpha = (U_\alpha, \emptyset'_\alpha, V'_{\alpha G})$ deux cartes en m de η et η' respectivement, l'expression

$$< v', v > = < p_2 \emptyset'_\alpha(v'), p_2 \emptyset_\alpha(v) > \quad \text{(pour la dualité } (V'_\alpha, V_\alpha))$$

est indépendante de α, d'après (2), et définit une application ayant les propriétés données en 1°), la régularité étant conséquence des propriétés classiques d'hypocontinuité des formes bilinéaires canoniques de dualité (les fibres des fibrés de classe $\mathcal{C}$ sont "pseudo-topologiques" tandis que celles des fibrés de classe $\mathcal{H}$ sont "topologiques").
La deuxième propriété s'établit en raisonnant dans une carte c de η et la carte associée c' de η', si $S_c : U \longrightarrow V$ et $S'_c : U \longrightarrow V'$

(*) $\mathcal{Y}' \underset{X}{}_B \mathcal{Y} = \{(v', v) \in \mathcal{Y}' \times \mathcal{Y} \mid \pi v = \chi v'\} = \bigcup_{m \in B} \mathcal{Y}'_m \times \mathcal{Y}_m$

sont les expressions de S et S' dans c et c'

$$< S'(m), S(m) > = < S'_c,(m), S_c(m) >$$

et $\lim_{m \to m_o} S'(m) = S'(m_o)$ dans V'_G, $\lim_{m \to m_o} S(m) = S(m_o)$. De plus, au voisinage de m_o, si η est de classe $\mathscr{C}_G$ $S_c(m)$ reste dans un ensemble de $G(V)$ et si η est de classe $\mathscr{H}_G$ $S'_c,(m)$ reste dans un ensemble équicontinu de V' donc dans les deux cas

$$\lim_{m \to m_o} < S'_c,(m), S_c(m) > = < S'_c,(m_o), S_c(m_o) > = < S'(m_o), S(m_o) >$$

Remarque :

Soient b le foncteur "ensemble des parties bornées" défini dans Γ.

b' le foncteur "ensemble des parties fortement bornées" défini dans Γ'.

(4) Si Γ est une catégorie d'e.l.c. tonnelés et si η est dans $\mathcal{F}V_o(B,\Gamma,G)$ (resp : $\mathcal{F}V_1(B,\Gamma,G)$) alors η' est dans $\mathcal{F}V_1(B,\Gamma'_G,b')$ (resp : $\mathcal{F}V_o(B,\Gamma'_G,b')$).

(5) Si Γ est une catégorie d'e.l.c. tonnelés : $\mathcal{F}V_o(B,\Gamma,b) = \mathcal{F}V_1(B,\Gamma,b)$ (mêmes objets et mêmes morphismes) et le fibré dual η' d'un fibré de cette catégorie est dans $\mathcal{F}V_o(B,\Gamma'_b,b') = \mathcal{F}V_1(B,\Gamma'_b,b')$.

Dual d'un δ-fibré vectoriel.

On reprend les catégories d'e.l.c. Γ_1 et Γ_2, une catégorie de δ-couples d'e.l.c. $\dot{+}$ et un couple de foncteurs $G = (G_1,G_2)$ comme au n° 2, de plus, on suppose $\dot{+}$ formée de δ-couples stricts. Dans ces conditions, on peut construire les deux catégories Γ'_{iG_i}, $i = 1,2$, formées des e.l.c. E'_G où E est dans Γ_i et dont les morphismes sont les ${}^t f$, f étant un morphisme de Γ_i, puis la catégorie $\dot{+}'_G$ des δ-couples(*) $\Delta'_G = (W'_G, V'_G, {}^t j)$ où $\Delta = (V,W,j)$ est dans $\dot{+}$, catégorie dont les morphismes sont les couples $({}^t g, {}^t f)$ où (f,g) est un morphisme de $\dot{+}$. Si $\{U_\alpha\}$ est un recouvrement ouvert de B et si

---

(*) ${}^t j : W'_G \longrightarrow V'_G$ est continue : en vertu de (3) du n° 2, si $M \in G(V)$, $j(M) = N \in G(W)$ donc ${}^t j(N^\circ) = M^\circ$ et M° est un voisinage de 0 dans V'_G, N° au voisinage de 0 dans W'_G

$$g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Mor(V_\alpha, V_\beta), \quad h_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Mor(W_\alpha, W_\beta)$$

avec $(g_{\beta\alpha}(m), \ h_{\beta\alpha}(m)) \in Mor(\Delta_\alpha, \Delta_\beta), \quad m \in U_\alpha \cap U_\beta.$

est un couple de cocycles qui détermine le δ*-couple de fibrés vectoriels* $\xi = (\eta_1, \eta_2, J)$ *de classe* $\mathcal{C}_G$ *(resp :* $\mathcal{H}_G$*), alors*

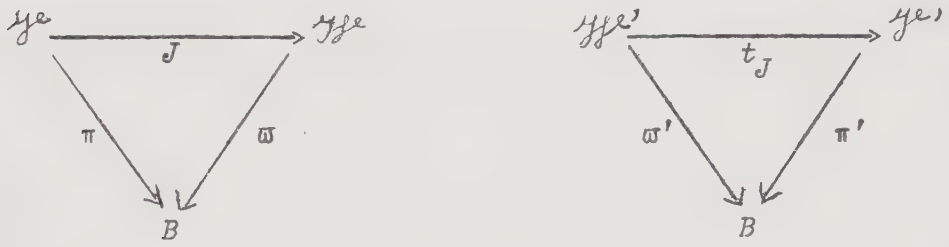
$$\overset{\vee}{h}_{\beta\alpha} = {}^t h_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathcal{L}(W'_{\alpha G}, W'_{\beta G}), \quad \overset{\vee}{g}_{\beta\alpha} : {}^t g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathcal{L}(V'_{\alpha G}, V'_{\beta G})$$

forment deux cocycles, qui déterminent respectivement η'_2 *et* η'_1*, et vérifient*

$$(\overset{\vee}{h}_{\beta\alpha}(m), \ \overset{\vee}{g}_{\beta\alpha}(m)) \in Mor(\Delta'_{\alpha G}, \Delta'_{\beta G})$$

Ces deux cocycles déterminent donc (Proposition 1, n° 3) un δ*-fibré vectoriel à fibres dans* $\mathcal{F}'_G$ *et de classe* $\mathcal{H}_{\mathcal{C}q}$ *(resp :* $\mathcal{C}_{\mathcal{C}q}$*) dont le* δ*-couple de fibrés associés est* $\xi' = (\eta'_2, \eta'_1, {}^t J)$*. Dans une* δ*-carte* $c = (U, \overset{\vee}{\emptyset}, \overset{\vee}{\psi}, \Delta)$ *de* ξ' *l'injection* ${}^t J$ *est représentée par*

$$\overset{\vee}{\emptyset} \circ J \circ \overset{\vee}{\psi} = {}^t J_c : U \times W' \longrightarrow U \times V' : (m, w') \rightsquigarrow (m, {}^t j w')$$



$$\xi = (\mathcal{Y}, \mathcal{Y}', B, \pi, \varpi, J)$$
$$\xi' = (\mathcal{Y}', \mathcal{Y}, B', \varpi', \pi', {}^t J)$$

n° 5. *Affaiblissement de structure d'un fibré vectoriel ou du dual d'un fibré vectoriel.*

Dans le n° 1 nous avons montré qu'il est possible de définir intrinsèquement une "pseudo-topologie affaiblie" sur l'espace $\mathcal{Y}$ *d'un fibré* η *de classe* $\mathcal{C}_G$*, de la même manière, il serait possible de définir une "pseudo-topologie de la convergence simple" sur l'espace* $\mathcal{Y}'$ *du dual* η' *d'un fibré de classe* $\mathcal{H}_G$ *En fait, ces propriétés ont lieu, non seulement pour les topologies faibles mais aussi pour toutes les topologies localement convexes sur les fibres de* η *ou* η' *compatibles avec la dualité* $(\mathcal{Y}'_m, \mathcal{Y}_m)$:

Définition :

Soient Γ *une catégorie d'e.l.c. (comme au n° 1)* Γ' *la catégorie des duals des e.l.c. de* Γ *et dont les morphismes sont les transposés de ceux de* Γ.

1°) On appelle foncteur de Mackey sur Γ *tout foncteur* $\mathfrak{M}$ *tel que*

(α) $\mathfrak{M}(E)$ *est un recouvrement de* E *par des ensembles convexes équilibrés et compacts pour la topologie* $\sigma(E,E')$.

(β) Si $u \in Mor(E,F)$: $u(\mathfrak{M}(E)) \subset \mathfrak{M}(F)$.

2°) On appelle foncteur de Mackey sur Γ' *tout foncteur* $\mathfrak{M}'$ *tel que*

(α) $\mathfrak{M}'(E')$ *est un recouvrement de* E' *par des ensembles convexes équilibrés équicontinus et fermés pour la topologie* $\sigma(E,E')$.

(β) Si $u \in Mor(E,F)$: ${}^t u(\mathfrak{M}'(F')) \subset \mathfrak{M}'(E')$.

Le choix des propriétés (α) est motivée par le fait qu'une partie équicontinue de E' *est compacte pour* $\sigma(E',E)$ *et par les théorèmes de Mackey (Bourbaki III, chap. IV, 2, prop. 2 et théorème 2) : dans ces conditions pour tout e.l.c.* E *de* Γ *on peut définir la* $\mathfrak{M}'$*-topologie sur* E, *moins fine que la topologie de* E (*), *et la* $\mathfrak{M}$*-topologie sur* E' *-topologies de la convergence uniforme sur les parties de* $\mathfrak{M}'(E')$ *et* $\mathfrak{M}(E)$ *respectivement - topologies compatibles avec la dualité entre* E *et* E'. *On notera* $E_{\mathfrak{M}'}$ *et* $E'_{\mathfrak{M}}$ *les e.l.c. ainsi obtenus. En particulier, on peut choisir*

(1) $\mathfrak{M}(E)$ = *ensemble des enveloppes convexes équilibrées des parties finies de* E, *la* $\mathfrak{M}$*-topologie sur* E' *est alors la topologie faible* $\sigma(E',E)$, *(notation* E'_S*).*

(2) $\mathfrak{M}'(E')$ = *ensemble des enveloppes convexes équilibrées des parties finies de* E', *la* $\mathfrak{M}'$*-topologie sur* E *est alors la topologie affaiblie* $\sigma(E,E')$, *(notation* E_σ*).*

(*) *C'est pour que* $E_{\mathfrak{M}'}$ *soit moins fin que* E *que les parties de* $\mathfrak{M}'(E')$ *sont supposées équicontinues plutôt que compactes pour* $\sigma(E',E)$. *(Cette distinction entre "équicontinuité et "compacité" n'intervient pas si* E *est tonnelé).*

Remarque :

Dans l'exemple précédent, il se peut que $Mor(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$. *Il en sera souvent ainsi, (β) ne traduisant alors qu'une propriété générale des applications linéaires continues.*

Lemme :

Soit $\mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{M}'$ *des foncteurs de Mackey sur* Γ *et* Γ' *respectivement alors :*

1°) $u \in Mor(E,F)$ $(\subset \mathcal{L}(E,F)) \Longrightarrow u \in \mathcal{L}(E_{\mathfrak{M}'}, F_{\mathfrak{M}'})$

Si, de plus, E et F ont leur topologie de Mackey (cas des e.l.c. métrisables ou tonnelés)

$$u \in \mathcal{L}(E_{\mathfrak{M}'}, F_{\mathfrak{M}'}) \Longrightarrow u \in \mathcal{L}(E,F)$$

2°) $u \in Mor(E,F) \Longrightarrow {}^t u \in \mathcal{L}(F'_{\mathfrak{M}}, E'_{\mathfrak{M}})$

$$v \in \mathcal{L}(F'_{\mathfrak{M}}, E'_{\mathfrak{M}}) \Longrightarrow v \in \mathcal{L}(F'_S, E'_S)$$

Démonstration :

1°) *Soit* $Y^\circ \subset Y \in \mathfrak{M}'(F'))$ *un voisinage de 0 dans* $F_{\mathfrak{M}'}$, *il existe* $X \in \mathfrak{M}'(E')$ *tel que* ${}^t u(Y) \subset X$ *donc* $u(X^\circ) \subset Y^\circ$ *et* X° *est voisinage de 0 dans* $E_{\mathfrak{M}'}$. *De plus, si E et F ont leur topologie de Mackey, les topologies affaiblies de* $E_{\mathfrak{M}'}$ *et* $F_{\mathfrak{M}'}$ *étant* E_σ *et* F_σ

$$u \in \mathcal{L}(E_{\mathfrak{M}'}, F_{\mathfrak{M}'}) \Longrightarrow u \in \mathcal{L}(E_\sigma, F_\sigma) \Longrightarrow u \in \mathcal{L}(E,F)$$ *(Bourbaki, chap. IV, prop. 7)*

2°) *La première implication s'établit comme dans le 1°), la seconde résulte de ce que les topologies affaiblies de* $F'_{\mathfrak{M}}$ *et* $E'_{\mathfrak{M}}$ *sont* F'_S *et* E'_S.

Le lemme suggère d'introduire les deux catégories et le foncteur $\mathcal{C}$ *définis par*

$\Gamma_{\mathfrak{M}'}$ = *catégorie des e.l.c.* $E_{\mathfrak{M}'}$ *avec* $Mor(E,F) = Mor(E_{\mathfrak{M}'}, F_{\mathfrak{M}'})$

$\Gamma'_{\mathfrak{M}}$ = *catégorie des e.l.c.* $E'_{\mathfrak{M}}$ *avec* $Mor(E'_{\mathfrak{M}}, F'_{\mathfrak{M}}) = {}^t Mor(F,E)$

$\mathcal{C}(E_{\mathfrak{M}'}) = G(E)$ *si E est dans* Γ.

Proposition 3 :

Soit $\eta = (\mathcal{E}, B, \pi)$ *un fibré vectoriel à fibres dans* Γ,

$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{J}\}$ *un atlas de* η.

1°) *Si* η *est de classe* $\mathcal{C}_G$, *alors* $\mathcal{A}_{\mathcal{M}'} = (U_\alpha, \emptyset_\alpha, V_{\alpha\mathcal{M}'}) \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ *est un atlas vectoriel qui définit sur* $(\mathcal{Y}, B, \pi)$ *une structure de fibré vectoriel à fibres dans* $\Gamma_{\mathcal{M}'}$ *de classe* $\mathcal{C}_\mathcal{L}$, *structure notée* $\eta_{\mathcal{M}'}$.

- $(\eta, \eta_{\mathcal{M}'}, I)$ *est un* δ*-couple strict de fibrés vectoriels* (I = *identité de* $\mathcal{Y}$).

2°) *Si* η *est de classe* $\mathcal{H}_G$ *et si* $\mathcal{M}(E) \subset G(E)$, *alors* $\check{\mathcal{A}}_{\mathcal{M}} = \{(U_\alpha, \check{\emptyset}_\alpha, V'_{\alpha\mathcal{M}}) \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ *est un atlas vectoriel qui définit sur* $(\mathcal{Y}', B, \pi')$ *une structure de fibré vectoriel à fibres dans* $\Gamma'_{\mathcal{M}}$ *de classe* $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_q}$, *structure notée* $\eta'_{\mathcal{M}}$.

- $(\eta', \eta'_{\mathcal{M}}, I')$ *est un* δ*-couple strict de fibrés vectoriels* (I' = *identité de* $\mathcal{Y}'$).

Démonstration aisée à partir du lemme appliqué aux applications de transition et en utilisant le fait que $E_{\mathcal{M}'}$ *est moins fin que* E, $F'_{\mathcal{M}}$ *est moins fin que* F'_G.

En prenant en particulier les foncteurs des exemples (1) et (2) on obtient le

Corollaire :

- *Si* η *est de classe* $\mathcal{C}_G$ *il existe un fibré* η_σ *affaibli de* η, *à fibres dans* Γ_σ.
- *Si* η *est de classe* $\mathcal{H}_G$ *il existe un fibré* η'_S *dual faible de* η, *à fibres dans* Γ'_S.

(η, η_σ, I) *et* (η', η'_S, I') *sont des* δ*-couples de fibrés vectoriels.*

§2. VARIETES BIMODELEES

Dans ce paragraphe, on définit d'abord deux classes d'applications : les applications bidifférentiables qui sont des applications différentiables particulières et les applications pseudo-différentiables plus générales que les applications différentiables.

Le recollement d'ouverts d'espace de Banach "V" pris dans des δ-couples d'e.l.c. (V,W,j) par des applications bidifférentiables conduit à la notion de variété bimodelée. Une structure de variété bimodelée admet une structure de variété différentielle sous-jacente mais permet de définir un calcul différentiel plus riche que celui de la variété sous-jacente ; par exemple, une variété bimodelée Ω a un δ-fibré vectoriel tangent dont les fibrés vectoriels associés sont le fibré tangent à la variété sous-jacente et le fibré "pseudo-tangent dont les fibres peuvent être des e.l.c. non normables. La structure de variété bimodelée permet de définir intrinsèquement des applications "pseudo-différentiables" de $\mathbb{R}$ dans Ω qui, sans avoir d'application tangente pour la structure de variété sous-jacente ont une application "pseudo-tangente" à valeurs dans l'espace pseudo-tangent ; l'obtention de l'application pseudo-tangente revient à dériver dans une topologie moins fine que celle du modèle de la variété sous-jacente et qui peut être celle d'un e.l.c. non normable.

n° 1. Applications bidifférentiables.

Pour tous les δ-couples d'e.l.c. (V,W,j) considérés dans le §2, on supposera que V est un espace de Banach (dans le sens d'espace localement convexe normable complet). Soit $\Delta_\alpha = (V_\alpha, W_\alpha, j_\alpha)$ $\alpha = 1,2$ des δ-couples stricts d'e.l.c. et U un ouvert de V_1.

Définition 1. 1°) On dit que l'application $f : U \longrightarrow V_2$ est bidifférentiable si

- f est continuement différentiable.
- $\forall x \in U \quad \exists f^\circ(x) \in \mathcal{L}(W_1, W_2)$ tel que $f^\circ(x) \circ j_1 = j_2 \circ f^\circ(x)$.

Dans ces conditions $f^\circ(x)$ est d'ailleurs défini de façon unique. On définirait de façon évidente la bidifférentiabilité en un

point de U. Pour la suite, nous aurons besoin de classes d'applications bidifférentiables plus restreintes et qui sont construites de la manière suivante :

Soient Γ_1 et Γ_2 des catégories d'e.l.c., $\dot{+}$ une catégorie de δ-couples stricts d'e.l.c., $G = (G_1, G_2)$ un couple de foncteurs ayant les propriétés (1) et (3) du §1. n° 2. On supposera de plus que :

(0) Γ_1 est formée d'espaces de Banach.

G_1 est le foncteur "ensemble des parties bornées" noté aussi b.

Si besoin est, on supposera $\mathbb{K}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans Γ_1 et Γ_2 en faisant toujours la convention : $Mor(\mathbb{K},\mathbb{E}) = \mathcal{L}(\mathbb{K},\mathbb{E})$, $Mor(\mathbb{E},\mathbb{K}) = \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{K})$ pour $\mathbb{E}$ dans Γ_1 ou Γ_2, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les morphismes de Γ_1 peuvent être les applications linéaires continues ce qui aura lieu le plus souvent, il n'est cependant pas nécessaire qu'il en soit ainsi.

Définition 1. 2°) Une application bidifférentiable (relativement à $\dot{+}$) est une application $f : U \longrightarrow V_2$, $\Delta_\alpha = (V_\alpha, W_\alpha, j_\alpha)$ $\alpha = 1,2$ étant des δ-couples de $\dot{+}$, U étant un ouvert de V_1 telle que :

- f est continument différentiable.
- Il existe $f^\circ : U \longrightarrow Mor(W_1, W_2)$ telle que $(f'(x), f^\circ(x)) \in Mor(\Delta_1, \Delta_2)$ pour $x \in U$ (*).

3°) f, supposée bidifférentiable, est dite de classe $\mathcal{C}^1_G$ (resp : $\mathcal{H}^1_G$) si

- $f^\circ : U \longrightarrow Mor(W_1, W_2)$ est une application de classe $\mathcal{C}_G$ (resp : $\mathcal{H}_G$).

4°) f, supposée bidifférentiable, est dite de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ si

- $\dot{+}$ est formée de δ-couples d'espaces de Banach.
- f est de classe $\mathcal{C}^k$, f° est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

(1) Soient Δ_1 et Δ_2 des δ-couples de $\dot{+}$. On suppose que $Mor(\Delta_1, \Delta_2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V_1, V_2) \times \mathcal{L}(W_1, W_2)$. Les applications $f : U \longrightarrow V_2$ bidifférentiables (resp : et de classe $\mathcal{C}^1_G$ $\mathcal{H}^1_G$ $\mathcal{C}^k$) forment un K espace vectoriel ; si f_1 et f_2 sont de telles applications :

(*) En particulier $f'(x) \in Mor(V_1, V_2)$ (ce qui n'est une restriction que si $Mor(V_1, V_2) \neq \mathcal{L}(V_1, V_2)$

$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)^\circ(x) = \lambda_1 f_1^\circ(x) + \lambda_2 f_2^\circ(x)$ $\quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \quad x \in U$

Cette propriété est évidente ; les propriétés essentielles sont (2) et (3) ci-dessous.

(2) *Soient* $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ *des* δ*-couples de* $\dot{+}$, U_1 *et* U_2 *des ouverts de* V_1 *et* V_2, $f : U_1 \longrightarrow V_2$, $g : U_2 \longrightarrow V_3$. *Si* $f(U_1) \subseteq U_2$ *et si* f *et* g *sont bidifférentiables (resp : et de classe* $\mathcal{C}^1_G, \mathcal{H}^1_G, \mathcal{C}^k$*) alors* gof *est bidifférentiable (resp : de classe* $\mathcal{C}^1_G, \mathcal{H}^1_G, \mathcal{C}^k$*) et*

$$(gof)^\circ(x) = g^\circ(y) o f^\circ(x), \quad y = f(x), \quad x \in U_1$$

Démonstration de (2) :

Pour $x \in U_1$ *on a* $f^\circ(x) o j_1 = j_2 o f((x)$

Pour $y \in U_2$ *on a* $g^\circ(y) o j_2 = j_3 o g'(y)$

Si $y=f(x)$: $j_3 o (gof)'(x) = j_3 o g'(y) o f'(x) = g^\circ(y) o j_2 o f'(x) = g^\circ(y) o f^\circ(x) o j_1$,

Le couple $(g'(y) o f'(x), g^\circ(y) o f^\circ(x))$ *est donc un morphisme de* Δ_1 *dans* Δ_3 *et la formule annoncée en découle (resp : cette formule et (5) du §1.n° 1 entraînent les conditions de classe* $\mathcal{C}_G$ *ou* $\mathcal{H}_G$ *le cas* $\mathcal{C}^k$ *est évident).*

Définition 2 : Soient Δ_1 *et* Δ_2 *deux* δ*-couples de* $\dot{+}$, U_1 *et* U_2 *des ouverts de* V_1 *et* V_2. *On dit que* $f : U_1 \longrightarrow U_2$ *est un bidifféomorphisme (resp : de classe* $\mathcal{C}^1_G, \mathcal{H}^1_G, \mathcal{C}^k$*) si :*

- f *est une bijection de* U_1 *sur* U_2.
- f *et* f^{-1} *sont des applications bidifférentiables (resp : et de classe* $\mathcal{C}^1_G, \mathcal{H}^1_G, \mathcal{C}^k$*).*

En particulier, f est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ *(resp :* $\mathcal{C}^k$ *dans le dernier cas) de* U_1 *sur* U_2.

(3) *Si* $f : U_1 \longrightarrow U_2$ *est un bidifféomorphisme, pour tout* $x \in U_1$, $f^\circ(x)$ *est un isomorphisme de* W_1 *sur* W_2 *(dans* Γ_2*) et en particulier un isomorphisme des structures d'e.l.c., de plus :*

$$f^\circ(x)^{-1} = f^{-1\circ}(y) \quad si \quad y = f(x)$$

Démonstration de (3) :

De $f'(x) o f^{-1\prime}(y) = id_{V_2}$ *on déduit* $f^\circ(x) o f^{-1\circ}(y) o j_2 = j_2$

$(j_2 \circ f'(x) \circ f^{-1'}(y) = f^{\circ}(x) \circ j_1 \circ f^{-1'}(y) = f^{\circ}(x) \circ f^{-1\circ}(y) \circ j_2 = j_2$ puisque $f'(x) \circ f^{-1'}(y) = id_{V_2}$). Les applications i_{W_2} et $f^{\circ}(x) \circ f^{-1\circ}(y)$ coïncident sur $j_2 V_2$, sous-espace dense de W_2 donc $f^{\circ}(x) \circ f^{-1\circ}(y) = id_{W_2}$. On établit de même que $f^{-1\circ}(y) \circ f^{\circ}(x) = id_{W_1}$ d'où (3).

Une autre forme de la définition d'une application bidifférentiable.

Dans les conditions de la définition 1, posons :

$Tf : U_1 \times V_1 \longrightarrow U_2 \times V_2 : (x,v) \rightsquigarrow (f(x), f'(x)v)$ *(application tangente usuelle).*

$\tilde{T}f : U_1 \times W_1 \longrightarrow U_2 \times W_2 : (x,w) \rightsquigarrow (f(x), f^{\circ}(x)w)$ *(application pseudo-tangente)*

U_2 *étant un ouvert de* V_2 *tel que* $f(U_1) \subseteq U_2$. *On a*

(4) $\tilde{T}f \circ J_1 = J_2 \circ Tf$ où

$J_1 = id_{U_1} \times j_1$, $J_2 = id_{U_2} \times j_2$

c'est-à-dire que le diagramme de la figure 1, où les applications non notées sont les projections sur le 1er facteur, est commutatif. On a d'ailleurs la propriété suivante :

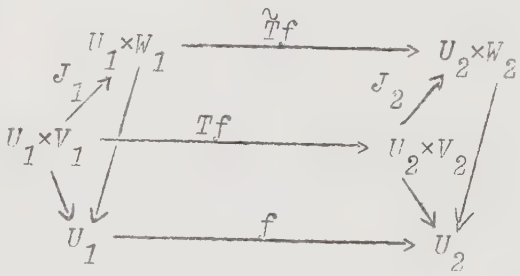


fig. 1

(5) *Pour que* $f : U_1 \longrightarrow U_2$ *soit bidifférentiable (resp : de classe* $\mathcal{C}_G^{\circ}$ $\mathcal{H}_G^{\circ}$ $\mathcal{C}^k$) *il faut et il suffit que :*

- *f soit différentiable.*
- *Il existe une application* $\tilde{T}f : U_1 \times W_1 \longrightarrow U_2 \times W_2$ *telle que le diagramme fig. 1 soit commutatif.*
- *Pour tout* $x \in U_1$, $T_x f \in Mor(V_1, V_2)$, $\tilde{T}_x f \in Mor(W_1, W_2)$.
- *(resp : et que les applications* $x \rightsquigarrow T_x f$, $x \rightsquigarrow \tilde{T}_x f$ *soient de classe* $\mathcal{C}_G^{\circ}$ $\mathcal{H}_G^{\circ}$ $\mathcal{C}^k$).

$T_x f : V_1 \longrightarrow V_2$ *et* $\tilde{T}_x f : W_1 \longrightarrow W_2$ *sont les applications induites à partir des restrictions à* $x \times V_1$ *et* $x \times W_1$ *respectivement.*

Une application bidifférentiable peut donc être considérée comme une application ayant une différentielle et une pseudo-différentielle ou bien ayant une application tangente et une application pseudo-tangente. Voici des propriétés qui seront utilisées par la suite (les notations étant les mêmes que ci-dessus).

(6) *Si* $f : U_1 \longrightarrow V_2$ *est bidifféventiable et de classe* $\mathcal{C}^2$ *alors* $\forall x \in U_1$, $\forall v_1$ *et* $v_2 \in V_1$: $f^{\rho\,\prime}(x)(v_1 \cap j_1 v_2) = f^{\rho\,\prime}(x)(v_2, j_1 v_1) = j_2 f''(x)(v_1 v_2)$.

Plus généralement :

(7) *Si* $f : U_1 \longrightarrow V_2$ *est bidifférentiable et de classe* $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 2)$ *alors pour* $1 \leq p \leq k$

$$\forall x \in U_1, \forall v_1 \ldots v_{p-1} \in V_1 : f^{\rho(p-1)}(x)(v_1, \ldots, v_{p-1}) \circ j_1 = j_2 \circ f^{(p)}(x)(v_1, \ldots, v_{p-1}, \cdot)$$

(8) $\forall x \in U_1, \exists C_x > 0$ *et* $\alpha_x > 0$ *tels que* $\|h\|_{V_1} \leq \alpha_x$ *entraîne*

$$\left| j_2 f(x+h) - h_2 f(x) - \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p!} f^{\rho(p-1)}(x)(h, \ldots, h)(j_1 h) \right|_{W_2} \leq C_x \|h\|_{V_1}^{k-1} |j_1 h|_{W_1}$$

Les formules (6) et (7) s'obtiennent immédiatement par différentiation de la relation $f^{\rho}(x) \circ j_1 = j_2 \circ f'(x)$. *La formule de Taylor*

$$f(x+h) - f(x) - \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p!} f^{(p)}(x)(h, \ldots, h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x+th)(h, \ldots, h)\, dt$$

donne avec la formule (7) :

$$j_2 f(x+h) - j_2 f(x) - \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p!} f^{\rho(p-1)}(x)(h, \ldots, h)(j_1 h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{\rho(k-1)}(x+th)(h, \ldots, h)(j_1 h)\, dt$$

or, il existe $\alpha_x > 0$ *tel que* $f^{\rho(p-1)}(x+u)$ *soit borné en norme d'application multilinéaire pour* $\|u\|_{V_1} \leq \alpha_x$ *(continuité de* $x \rightsquigarrow f^{\rho(k-1)}(x)$*). (8) en découle par des majorations faciles.*

Remarques :

Dans la définition 1. 2°) si les δ*-couples sont* (V_1, V_1, id)

et (V_2, W_2, j_2) *alors* $f : U_1 \longrightarrow V_2$ *est bidifférentiable si et seulement si*

(9) . f est continument différentiable.

. $\forall x \in U_1 \quad f'(x) \in Mor(V_1, V_2)$ et $f^\circ(x) = {}^t j_2 \circ f)'(x) \in Mor(V_1, W_2)$

si les δ*-couples sont* (V_1, W_1, j_1) *et* (V_2, V_2, id) *alors* f *est bidifférentiable si et seulement si*

(10) . f est continument différentiable.

. $\forall x \in U_1 \quad f'(x) \in Mor(V_1, V_2)$ et $f'(x)$ est continue sur V_1 muni de la topologie image réciproque de celle de W_1 par j_1 (condition assurant l'existence de $f^\circ(x)$).

. $\forall x \in U_1 \quad f^\circ(x) \in Mor(V_1, V_2)$.

Lorsqu'il sera question d'applications bidifférentielles définies (resp : à valeurs) dans $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *on se référera toujours à la situation de (9) (resp : (10)) sans préciser les* δ*-couples* $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, id)$ *ou* $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, id)$. *Dans ces conditions et avec la convention faite en (0) les conditions d'appartenance aux ensembles de morphismes dans (9) et (10) sont automatiquement vérifiées.*

n° 2. Applications pseudo-différentiables.

Une application bidifférentiable admet, comme nous l'avons vu, une application tangente Tf *et une application pseudo-tangente* $\tilde{T}f$ *; une application pseudo-différentiable est une application pour laquelle seule* $\tilde{T}f$ *existe. Ces applications ne seront étudiées ici que dans le cas particulier où elles sont définies sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$. *Soit alors* (V, W, j) *un* δ*-couple strict d'e.l.c.*

Définition 3. $f : I \longrightarrow V$ *est pseudo-différentiable (resp : en* $t_o \in I$*) si*

. f *est continue de* I *dans* V *(resp : au point* t_o*).*

. $j \circ f$ *est dérivable (resp : au point* t_o*).*

On définit alors $f^\circ(t) = \frac{d}{dt}\, j \circ f(t)$ *et* $\tilde{T}f(t) = (f(t), f^\circ(t))$ (*)

(*) *En toute rigueur, on devrait définir* $\tilde{T}f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow V \times W : (t, u) \rightsquigarrow (f(t), uf^\circ(t))$ *mais seule la restriction de* $\tilde{T}f$ *à* $I \times \{1\}$ *serait utile, d'où notre convention : noter* $\tilde{T}f$ *cette restriction.*

Lemme : *Soient* Δ_1 *et* Δ_2 *des* δ*-couples de* $\mathcal{F}$, U *un ouvert de* V_1, $g : U \longrightarrow V_2$ *une application bidifférentiable de classe* $\mathcal{C}^1_G$ *ou* $\mathcal{H}^1_G$, $v :]-\nu,\nu[\longrightarrow V_1$ $(\nu>0)$ *une application continue telle que* $v(0) = 0$ *et*

$$j_1 \frac{v(h)}{h} \in M \quad \text{pour} \quad h \in]-\nu,\nu[, \quad h \neq 0, \quad \text{et un certain } M \in \mathcal{G}_2(W_1)$$

Alors pour x *fixé dans* U *et pour toute semi-norme* p *continue sur* W_2 :

$$\lim_{h \to 0, h \neq 0} p\left(\frac{1}{h}(j_2 g(x+v(h)) - j_2 g(x)) - g^{\circ}(x) j_1 \frac{v(h)}{h}\right) = 0$$

Démonstration : *Comme* $p \circ j_2$ *est une semi-norme continue sur* V_2 *la formule*

$$g(x+u) - g(x) - g'(x)u = \int_0^1 (g'(x+su) - g'(x))\,ds$$

entraîne

$$p(j_2 g(x+u) - j_2 g(x) - g^{\circ}(x) j_1 u) \leq \int_0^1 p((g^{\circ}(x+su) - g^{\circ}(x))(j_1 u))\,ds$$

si l'on pose $\varphi(h) = \frac{1}{h}(j_2 g(x+v(h)) - j_2 g(x) - g^{\circ}(x) j_1 \frac{v(h)}{h})$ *pour* $h \in]-\nu,\nu[$, $h \neq 0$.

$$(1) \quad p(\varphi(h)) \leq \int_0^1 p((g^{\circ}(x+su) - g^{\circ}(x))(j_1 \frac{v(h)}{h}))\,ds$$

Or, par hypothèse, si $\varepsilon>0$ *est donné, il existe* $\alpha>0$ *tel que*

$$(2) \quad ||u||_{V_1} \leq \alpha \Longrightarrow \sup_{y \in M} p(g^{\circ}(x+u)y - g^{\circ}(x)y) \leq \varepsilon$$

D'après la continuité de v, *il existe* $\beta>0$ *tel que* $|h| \leq \beta \Longrightarrow ||sv(h)|| \leq \alpha$ *pour* $0 \leq s \leq 1$ *et, comme* $j_1 \frac{v(h)}{h} \in M$, *d'après (1) et (2)* $|h| \leq \beta \Longrightarrow p(\varphi(h)) \leq \varepsilon$. *Le lemme est démontré ; on peut remarquer que la* **seule** *continuité de* $j_1 \circ v$ *semble insuffisante pour assurer l'exactitude de la conclusion ce qui nécessite d'inclure la continuité de* f *dans la définition 3 afin d'être en mesure de déduire du lemme la proposition 1 :*

Proposition 1 : *Soient* Δ_1 *et* Δ_2 *des* δ*-couples de* $\mathcal{F}$, $g : U \longrightarrow V_2$ *bidifférentiable de classe* $\mathcal{C}^1_G$ *ou* $\mathcal{H}^1_G$, $f : I \longrightarrow V_1$ *avec* $f(I) \subset U$ *une fonction pseudo-différentiable en* t_o *(resp : sur* I*). On suppose que* $\mathcal{G}_2(W_1)$ *contient les arcs continus compacts de* W_1 (*)

(*) *Ou bien que tout arc continu compact de* W_1 *est contenu dans un ensemble de* $\mathcal{G}_2(W_1)$.

Alors gof *est pseudo-différentiable en* t_o *(resp : sur I) et*

$$gof^{\wedge}(t_o) = g^{\wedge}(f(t_o))\ f^{\wedge}(t_o)$$

$$\tilde{T}(gof)(t_o) = \tilde{T}g \circ \tilde{T}f(t_o)$$

Démonstration : On choisit $v>0$ *de façon que* $v :]-v,v[\longrightarrow V_1 : h \rightsquigarrow f(t_o+h) - f(t_o)$ *vérifie les hypothèses du lemme où* $M \in \mathcal{G}_2(W_1)$, *(il existe un tel* M *car* $j_1 \frac{v(h)}{h}$ *est continue pour* $h \neq 0$ *et a pour limite* $f^{\wedge}(t_o)$ *au point* $h=0$, *l'image de* $0 \rightsquigarrow f^{\wedge}(t_o)$, $h \rightsquigarrow j_1 \frac{v(h)}{h}$ *est donc un arc continu compact de* W_1*) alors*

$$\frac{1}{h}(j_2 gof(t_o+h) - j_2 gof(t_o) - g^{\wedge}(f(t_o))\ f^{\wedge}(t_o))$$

$$= \frac{1}{h}(j_2 g(f(t_o)+v(h)) - j_2 g(f(t_o))) - g^{\wedge}(f(t_o))\, j_1 \frac{v(h)}{h}$$

$$+ g^{\wedge}(f(t_o))\left(j_1 \frac{v(h)}{h} - f^{\wedge}(t_o)\right)$$

La somme des deux premiers termes du second membre tend vers 0 d'après le lemme et le dernier terme tend vers 0 puisque $g^{\wedge}(f(t_o)) \in \mathcal{L}(W_1,W_2)$ *et* $\lim_{h \to 0,\ h\neq 0} j_1 \frac{v(h)}{h} = f^{\wedge}(t_o)$ *dans* W_1.

Remarques :

- *La conclusion de la proposition 1 subsiste si l'on suppose simplement que* $g^{\wedge} : U \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{G}}(W_1,W_2)$ *est une application continue.*
- *La proposition 1 est aussi valable pour les applications* g *bidifférentiables de classe* $\mathcal{C}^k$, $(k \geq 1)$.

n° 3. Définition des variétés bimodelées.

Les notations sont celles des n° précédents et, pour tous les δ*-couples* (V,W,j) *intervenant* V *est un espace de Banach. Lorsqu'interviennent les propriétés "de classe* $\mathcal{C}^k$*" tous les e.l.c. considérés sont alors des espaces de Banach. Dans la forme, la définition suivant est analogue à celle d'une variété différentielle :*

Définition 4. 1°) Soit Ω *un ensemble, une* δ*-carte de* Ω *dans* $\dot{+}$ *est un triplet* $c = (U,\varphi,\Delta)$ *où*

- U *est une partie de* Ω *(domaine de c).*
- $\Delta = (V,W,j)$ *est un* δ*-couple de* $\dot{+}$.

• φ est une bijection de U sur un ouvert de V.

2°) Deux δ-cartes de Ω $(U_\alpha, \varphi_\alpha, \Delta_\alpha)$, $\alpha = 1,2$ sont dites compatibles (resp : $\mathcal{C}^\infty_G$, $\mathcal{H}^\infty_G$, $\mathcal{C}^k$ compatibles) si

• Soit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

• Soit $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ et $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$ sont ouverts et l'application de transition

$$_{21} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} | \varphi_1(U_1 \cap U_2)$$

est un bidifféomorphisme (resp : de classe $\mathcal{C}^1_G$, $\mathcal{H}^1_G$, $\mathcal{C}^k$).

3°) Un δ-atlas (de classe $\mathcal{C}^\infty_G$, $\mathcal{H}^\infty_G$, $\mathcal{C}^k$) (dans $\boxed{+}$) sur Ω est un ensemble $\mathcal{A}$ de δ-carte de Ω deux à deux compatibles (resp : $\mathcal{C}^\infty_G$, $\mathcal{H}^\infty_G$, $\mathcal{C}^k$- compatibles) et dont les domaines recouvrent Ω. Il peut être commode de représenter un δ-atlas non comme un ensemble mais comme une famille de δ-cartes.

4°) Deux δ-atlas de Ω sont dits équivalents si $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ est un δ-atlas (de même classe que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$) ce qui définit une relation d'équivalence d'où :

5°) Une structure de variété bimodelée dans $\boxed{+}$ (resp : de classe $\mathcal{C}^\infty_G$, $\mathcal{H}^\infty_G$, $\mathcal{C}^k$) sur Ω est déterminée par une classe d'équivalence de δ-atlas (resp : de classe $\mathcal{C}^\infty_G$, $\mathcal{H}^\infty_G$, $\mathcal{C}^k$) (ou, ce qui revient au même par un δ-atlas maximal sur Ω).

Lorsque Ω est muni d'une structure de variété bimodelée, on appellera simplement δ-atlas ou δ-carte de Ω tout δ-atlas ou toute δ-carte d'un atlas de la structure de Ω.

<u>Structure de variété de Banach(*) sous-jacente à une structure de variété bimodelée sur Ω.</u>

Si $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha, \Delta_\alpha) | \alpha \in \mathcal{U}\}$ est un δ-atlas de Ω alors $\mathcal{A}_o = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha) | \alpha \in \mathcal{U}\}$ est un atlas qui détermine sur Ω une structure de variété de Banach( ) indépendante du choix de $\mathcal{A}$ parmi les δ-atlas de la structure de variété bimodelée de Ω ; cette structure est de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^k$ pour une variété bimodelée $\mathcal{C}^k$.

(*) Si les morphismes de Γ_1 ne sont pas toutes les applications linéaires continues, ce peut être une variété de Banach munie d'une structure aditionnelle : par exemple, une structure de Fredholm au sens de J. EELS et K. ELWORTHY I.

En particulier, toute structure de variété bimodelée détermine une topologie sur Ω qui n'est autre que la topologie de la variété de Banach sous-jacente ; on supposera toujours cette topologie séparée.

Applications bidifférentiables d'une variété bimodelée dans une autre.

Soient Ω et Ω' deux variétés bimodelées dans $\boxed{+}$ (resp : de classe $\mathcal{C}_G$ $\mathcal{H}_G$ $\mathcal{C}^k$) et $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ une application continue, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) Il existe un δ-atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha, \Delta_\alpha) | \alpha \in \mathcal{J}\}$ de Ω et un δ-atlas $\{(U'_\beta, \varphi'_\beta, \Delta'_\beta) | \beta \in \mathcal{J}'\}$ de Ω' tels que si $U'_\beta \cap f(U_\alpha) \neq \emptyset$ alors $\varphi'_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ est une application bidifférentiable (resp : et de classe $\mathcal{C}_G$ $\mathcal{H}_G$ $\mathcal{C}^k$) sur l'ouvert où elle est définie.

(b) Pour toute δ-carte (U, φ, Δ) de Ω et toute δ-carte (U', φ', Δ') de Ω' telles que $U' \cap f(U) \neq \emptyset$ l'application $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ est bidifférentiable (resp : de classe $\mathcal{C}_G$ $\mathcal{H}_G$ $\mathcal{C}^k$) sur l'ouvert où elle est définie.

(L'équivalence (a) $\Longleftrightarrow$ (b) résulte de (2) du n° 1).

Définition 5 : Si Ω et Ω' sont des variétés bimodelées (resp : de classe $\mathcal{C}_G$ $\mathcal{H}_G$ $\mathcal{C}^k$) une application continue $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ est dite bidifférentiable (resp : de classe $\mathcal{C}_G$ $\mathcal{H}_G$ $\mathcal{C}^k$) si f vérifie les conditions équivalentes (a) et (b).

Les variétés bimodelées des diverses classes forment des catégories dont les morphismes sont les applications bidifférentiables. (Bien entendu, les applications bidifférentiables sont différentiables au sens habituel).

Application pseudo-différentiables.

Ces applications ne sont étudiées ici que dans le cas particulier où elles sont définies dans un intervalle I de $\mathbb{R}$. De plus, on suppose que

(1) $G_2(W)$ contient les arcs continus compacts de W (dans Γ_2) (ou bien : tout arc compact est contenu dans un ensemble de $G_2(W)$). Dans ces conditions, si $f : I \longrightarrow \Omega$, variété bimodelée de classe $\mathcal{C}_G$ $\mathcal{H}_G$ ou $\mathcal{C}^k$, est une application continue, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(c) *Il existe une* δ*-carte de* Ω *en* $f(t_o)$ (U,φ,Δ) *telle que* $\varphi \circ f : I \longrightarrow V$ *soit pseudo-différentiable en* t_o.

(d) *Pour toute* δ*-carte de* Ω *en* $f(t_o)$ (U,φ,Δ), $\varphi \circ f : I \longrightarrow V$ *est pseudo-différentiable en* t_o.

(L'équivalence est conséquence de la proposition 1 du n° 2 et de (1) ci-dessus).

Définition 6 : Ω étant une variété bimodelée de classe $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$ *ou* $\mathcal{C}^k$. *Si la propriété (1) a lieu, on appelle application pseudo-différentiable de I dans Ω toute application continue qui vérifie les conditions équivalentes (a) et (b).*

(2) *Soient Ω et Ω' deux variétés bimodelées dans* $\dot{+}$ *et de même classe* $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$ *ou* $\mathcal{C}^k$, *la propriété (1) ayant lieu. Si :*

f : I ⟶ Ω est pseudo-différentiable.

g : Ω ⟶ Ω' est bidifférentiable et de classe $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$ *ou* $\mathcal{C}^k$ *alors gof : I ⟶ Ω' est pseudo-différentiable.*

(Démonstration immédiate).

n° 4. δ-fibré vectoriel tangent à une variété bimodelée.

Si $\mathcal{A} = \{(U_\alpha,\varphi_\alpha,\Delta_\alpha) \mid \alpha \in \mathfrak{I}\}$ *est un δ-atlas de Ω, les applications de transition*

(1) $\gamma_{\beta\alpha} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ *pour* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ *sont des bidifféomorphismes, on peut donc définir*

(2) $\gamma'_{\beta\alpha} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow Iso(V_\alpha,V_\beta)$, $\gamma^o_{\beta\alpha} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow Iso(W_\alpha,W_\beta)$ *et pour* $x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$: $(\gamma'_{\beta\alpha}(x),\gamma^o_{\beta\alpha}(x)) \in Iso(\Delta_\alpha,\Delta_\beta)$. *On en déduit que les applications :*

(3) $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Iso(V_\alpha,V_\beta) : m \rightsquigarrow \gamma'_{\beta\alpha}(\varphi_\alpha(m))$

$h_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Iso(W_\alpha,W_\beta) : m \rightsquigarrow \gamma^o_{\beta\alpha}(\varphi_\alpha(m))$

forment un couple de cocyles ayant les propriétés de la proposition 1 du §1, ces cocycles sont de classe $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$ *ou* $\mathcal{C}^k$ *en même temps que Ω, d'où la*

Définition 7 : Le δ-fibré vectoriel strict déterminé par les cocycles (3) est appelé δ-fibré tangent à la variété bimodelée Ω ; ce δ-fibré est de classe $\mathcal{C}_G$, $\mathcal{H}_G$ *ou* $\mathcal{C}^k$ *en même temps que Ω.*

Le δ-couple de fibrés vectoriels associés au δ-fibré tangent à Ω est $(\mathcal{C}(\Omega), \tilde{\mathcal{C}}(\Omega), J)$.

. $\mathcal{C}(\Omega) = (T\Omega, \Omega, p)$ s'identifie au fibré tangent à la variété de Banach Ω.

. $\tilde{\mathcal{C}}(\Omega) = (\tilde{T}\Omega, \Omega, \tilde{p})$ est le fibré pseudo-tangent à la variété bimodelée Ω. $\tilde{T}\Omega$ est l'espace pseudo-tangent à Ω dont les éléments sont les vecteurs pseudo-tangent, $T_m\Omega = p^{-1}(m)$ et $\tilde{T}_m\Omega = \tilde{p}^{-1}(m)$ sont les espaces vectoriels tangent et pseudo-tangent en m. (L'identité de $\mathcal{C}(\Omega)$ et du fibré tangent à la variété de Banach Ω selon la théorie classique provient de ce que les deux fibrés sont déterminés par le même cocycle). Les δ-cartes vectorielles du δ-fibré tangent sont les $(U_\alpha, \emptyset_\alpha, \psi_\alpha, \Delta_\alpha)\alpha \in \mathcal{I}$ où

(4) $\emptyset_\alpha(v) = (m, v_\alpha)$, $\psi_\alpha(w) = (m, w_\alpha)$
(v_α et w_α sont les représentants de $v \in T_m\Omega$ et $w \in \tilde{T}_m\Omega$ dans V_α et W_α respectivement et, sur $p^{-1}(U_\alpha)$, J est représentée par l'application

(5) $J_\alpha = \psi_\alpha \circ J \circ \emptyset_\alpha^{-1} : (m, v_\alpha) \rightsquigarrow (m, j_\alpha v_\alpha)$

Morphisme tangent à une application bidifférentiable.

Soient Ω et Ω' deux variétés bimodelées, $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ une application bidifférentiable, si $c_i = (U_i, \varphi_i, \Delta_i)$ $i = \alpha, \beta$ sont deux δ-cartes de Ω en m et $c_{i'} = (U_{i'}, \varphi_{i'}, \Delta_{i'})$ $i' = \alpha', \beta'$, sont deux δ-cartes de Ω' en $f(m)$, en désignant par $f_{\alpha'\alpha}$ et $f_{\beta'\beta}$ les expressions de f dans les δ-cartes c_α et $c_{\alpha'}$, d'une part et c_β et $c_{\beta'}$, d'autre part : (*)

(6) $f_{\beta'\beta}(x) = \gamma_{\beta'\alpha'} \circ f_{\alpha'\alpha} \circ \gamma_{\alpha\beta}(x)$ si $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ et $x = \varphi_\beta(m)$.

Si v_β et $v_\alpha = \gamma'_{\alpha\beta}(x) v_\beta$ d'une part, w_β et $w_\alpha = \gamma^{\circ}_{\alpha\beta}(x) w_\beta$ d'autre part sont les représentants de $v \in T_m\Omega$ dans V_α et V_β et de $w \in \tilde{T}_m\Omega$ dans W_α et W_β on tire de (6) par différentiation et "pseudo-différentiation" :

(7) $f'_{\beta'\beta}(\varphi_\beta(m)) v_\beta = g_{\alpha'\alpha'}(f(m)) f'_{\alpha'\alpha}(\varphi_\alpha(m)) v_\alpha$
$f^{\circ}_{\beta'\beta}(\varphi_\beta(m)) w_\beta = h_{\beta'\alpha'}(f(m)) f^{\circ}_{\alpha'\alpha}(\varphi_\alpha(m)) w_\alpha$

Compte tenu de (2) et (3) et de la propriété (2) n° 1, de plus (Définition 1 et 5).

(*) Par exemple $f_{\alpha'\alpha} = \varphi_{\alpha'} \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$.

$$(8)\quad f^{\mathcal{O}}_{\alpha'\alpha}(\varphi_\alpha(m)) \circ j_\alpha = j_{\alpha'} \circ f'_{\alpha'\alpha}(\varphi_\alpha(m))$$

Les formules (7) et (8) montrent qu'il existe un f-morphisme $(Tf, \tilde{T}f)$ *de* $(\mathcal{C}(\Omega), \tilde{\mathcal{C}}(\Omega), J)$ *dans* $(\mathcal{C}(\Omega'), \tilde{\mathcal{C}}(\Omega'), J')$ *représenté dans les cartes* c_α *et* $c_{\alpha'}$ *par :*

$$(Tf)_{\alpha'\alpha} : U_\alpha \times V_\alpha \longrightarrow U_{\alpha'} \times V_{\alpha'} : (m, v_\alpha) \rightsquigarrow (f(m), f'_{\alpha'\alpha}(\varphi_\alpha(m)) v_\alpha)$$

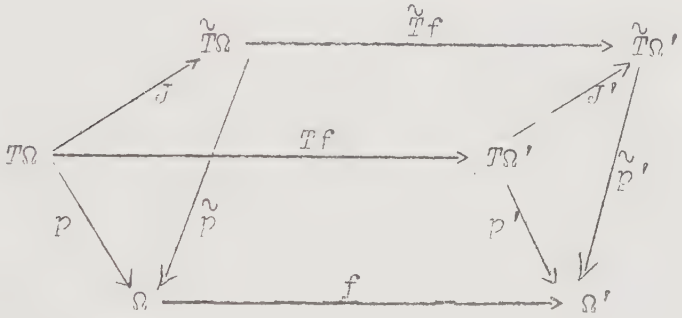
$$(\tilde{T}f)_{\alpha'\alpha} : U \times W_\alpha \longrightarrow U_{\alpha'} \times W_{\alpha'} : (m, w_\alpha) \rightsquigarrow (f(m), f^{\mathcal{O}}_{\alpha'\alpha}(\varphi_\alpha(m)) w_\alpha)$$

(8) traduit la relation $\tilde{T}f \circ J = J' \circ Tf$

Définition 8 : Le morphisme de δ-fibré vectoriel $(Tf, \tilde{T}f)$ *est appelé morphisme tangent à l'application bidifférentiable f.*

- *Tf est l'application tangente à f (de la théorie des variétés de Banach).*
- $\tilde{T}f$ *est l'application pseudo-tangente à f.*

La situation se résume sur le diagramme commutatif suivant :



Remarque : Si $c = (U, \varphi, \Delta)$ *est une δ-carte de* Ω

$$T\varphi : TU \longrightarrow \varphi(U) \times V : (m, v) \rightsquigarrow (\varphi(m), v)$$

$$\tilde{T}\varphi : \tilde{T}U \longrightarrow \varphi(U) \times W : (m, W) \rightsquigarrow (\varphi(m), w)$$

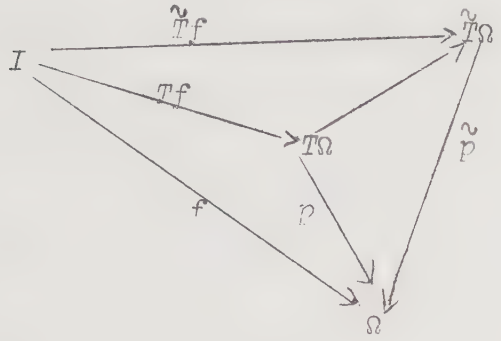
(où v et w sont les représentants de $\vec{v}$ *et* W *dans* V *et* W*) détermine un -isomorphisme du δ-fibré vectoriel* $(TU, \tilde{T}U, J|_{TU})$ *sur le δ-fibré vectoriel trivial* $(\varphi(U) \times V, \varphi(U) \times W, id \times j)$.

Cas des applications définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, TI *et* $\tilde{T}I$ *s'identifie à* $I \times \mathbb{R}$, *de plus si* $f : I \longrightarrow \Omega$ *est différentiable (donc ici bidifférentiable)*(*) Tf *et* $\tilde{T}f$ *se réduisent sur chaque fibre de* $I \times \mathbb{R}$ *à une*

(*) *I est une variété birodelée dans* $\overline{+} = \{(\mathbb{R}, \mathbb{R}, id)\}$!

homothétie, en notant par convention $Tf(t) = Tf(t,1)$ et $\tilde{T}f(t) = \tilde{T}f(t,1)$ on a le diagramme commutatif suivant :



Tf = application tangente à f.

$\tilde{T}f$ = application pseudo-tangente à f.

Si $f : I \longrightarrow \Omega$ est pseudo-différentiable, pour toute δ-carte en $f(t)$, $t \in I$, $c = (U_\alpha, \varphi_\alpha, \Delta_\alpha)$ on peut définir $f_\alpha = \varphi_\alpha \circ f : f^{-1}(U) \longrightarrow V_\alpha$ et $f^\delta_\alpha(t) = (\varphi_\alpha \circ f)^\circ(t)$. Si $c_\beta = (U_\beta, \varphi_\beta, \Delta_\beta)$ est une autre δ-carte en $f(t)$:

$$f^\delta_\beta(t) = h_{\beta\alpha}(f(t))\ f^\delta_\alpha(t)$$

Cela montre que $f^\delta_\alpha(t) \in W_\alpha$ est le représentant dans W_α d'un vecteur pseudo-tangent à Ω en $f(t)$ que nous noterons $\tilde{T}f(t)$. On définit ainsi une application

$$\tilde{T}f : I \longrightarrow \tilde{T}\Omega \qquad \text{(application pseudo-tangente à } f\text{)}.$$

Ainsi les applications pseudo-différentiables de I dans Ω peuvent être considérée comme des applications continues ayant une application pseudo-tangente sans avoir obligatoirement une application tangente.

n° 5. Le δ-fibré vectoriel cotangent à une variété bimodelée.

Les résultats du §1 sur la dualité des δ-fibrés vectoriels s'appliquent à $(\mathcal{T}(\Omega), \tilde{\mathcal{T}}(\Omega), J)$ et on pose la

Définition 9 : Soit Ω une variété bimodelée dans la catégorie $\mathcal{E}$, le δ-fibré vectoriel $(\tilde{\mathcal{T}}'(\Omega), \mathcal{T}'(\Omega), {}^tJ)$ dual de $(\mathcal{T}(\Omega), \tilde{\mathcal{T}}(\Omega), J)$ est appelé δ-fibré cotangent à Ω.

Les fibres de $\tilde{\mathcal{T}}'(\Omega)$ sont dans Γ'_{2G} de plus

- Si Ω est de classe $\mathcal{C}^1_G$ $\tilde{\mathcal{T}}'(\Omega)$ est de classe $\mathcal{H}_{\mathcal{L}_q}$.
- Si Ω est de classe $\mathcal{H}^1_G$ $\tilde{\mathcal{T}}'(\Omega)$ est de classe $\mathcal{H}_{\mathcal{L}_q}$.
- Si Ω est de classe $\mathcal{C}^k$ $\tilde{\mathcal{T}}'(\Omega)$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

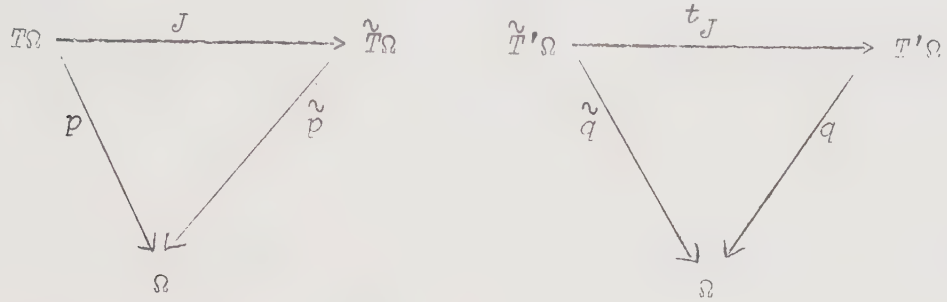
Le fibré $\mathcal{T}'(\Omega)$ s'identifie au fibré cotangent à la variété de Banach sous-jacente à Ω (Γ'_{1G} est formée de duals forts d'espaces de Banach, $\mathcal{T}'(\Omega)$ est de classe $\mathcal{C}^0$ (resp : $\mathcal{C}^{k-1}$) si Ω est de

classe $\mathcal{C}^1_G$ ou $\mathcal{H}^1_G$ (resp : $\mathcal{C}^k$)).

Remarque :

En général, le δ-fibré cotangent à une variété bimodelée n'est pas strict.

On notera $\mathcal{C}'(\Omega) = (T'\Omega, q, \Omega)$, $\tilde{\mathcal{C}}'(\Omega) = (\tilde{T}'\Omega, \tilde{q}, \Omega)$ de sorte que les diagrammes suivants sont commutatifs :



n° 6. Champs de pseudo-vecteurs sur une variété bimodelée.

Un champ de vecteurs sur une variété bimodelée est une section continue du fibré tangent $\mathcal{C}(\Omega)$.

Définition 10 : Un champ de pseudo-vecteurs sur une variété bimodelée est une section continue du fibré pseudo-tangent
$\tilde{\mathcal{C}}(\Omega)$: $Y : \Omega \longrightarrow \tilde{T}\Omega$, $\tilde{p} \circ Y = id_\Omega$

. Si Ω est de classe $\mathcal{C}^k$ Y est dit de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ si la section qui le représente est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Si $X : \Omega \longrightarrow T\Omega$ est un champ de vecteurs $J \circ X$ est un champ de pseudo-vecteurs.

Les propriétés des sections continues montrent qu'en particulier, les champs de vecteurs et les champs de pseudo-vecteurs forment un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et un $\mathcal{C}(\Omega)$-module.

Une intégrale d'un champ de vecteurs X sur Ω est une application différentiable $f : I \longrightarrow \Omega$ (I = intervalle de $\mathbb{R}$) telle que $Tf(t) = X(f(t))$ $t \in I$.

Définition 11 : Soit Ω une variété bimodelée dans $\boxed{+}$ et de classe $\mathcal{C}_G$ ou $\mathcal{H}_G$. On suppose que pour tout W de Γ_2 $G_2(W)$ contient les arcs continus compacts de W. On appelle intégrale d'un champ de pseudo-vecteurs Y toute application pseudo-différentiable $f : I \longrightarrow \Omega$ telle que

(1) $\quad \tilde{T}f(t) = Y(f(t)) \quad t \in I$

Bien entendu si $f : I \longrightarrow \Omega$ *est une courbe intégrale de* X, f *est une courbe intégrale de* $Y = J \circ X$ *(si* f *est différentiable alors, ici,* f *est aussi bidifférentiable et* $\tilde{T}f = J \circ Tf$*).*

Généralisation : cas des "champs de pseudo-vecteurs dépendant de t*".*

Soit Ω *une variété bimodelée de classe* $\mathscr{C}_G$ *ou* $\mathscr{H}_G$ *(*G *étant convenable) alors* $\Omega \times \mathbb{R}$ *est une variété bimodelée avec les* δ*-cartes* $(U \times \mathbb{R}, \varphi \times id, (V \times \mathbb{R}, W \times \mathbb{R}, j \times id))$ *et* $T(\Omega \times \mathbb{R})$ *s'identifie à* $T\Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $\tilde{T}(\Omega \times \mathbb{R})$ *s'identifie à* $\tilde{T}\Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, *(l'injection du* δ*-fibré tangent à* $\Omega \times \mathbb{R}$ *étant* $J \times id_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$*). Si* Z *est un champ de pseudo-vecteurs sur* $\Omega \times \mathbb{R}$ *tel que*

$$Z(m,s) = (Y(m,s), (s,1))$$

une courbe intégrale de Z *est une application pseudo-différentiable*

$$\varphi : I \longrightarrow \Omega \times \mathbb{R} : t \rightsquigarrow (f(t), g(t))$$

telle que

$$(3) \quad \begin{cases} \tilde{T}f(t) = Y(f(t), g(t)) \\ Tg(t) = (g(t), 1) \end{cases}$$

Comme $Tg(t) = (g(t), g'(t))$, *(3) équivaut à*

$$(4) \quad \tilde{T}f(t) = Y(f(t), t) \qquad t \in I$$

Etant donné un champ de pseudo-vecteurs Y *"dépendant du temps" sur une variété bimodelée* Ω *on peut donc poser le problème d'évolution :*

Déterminer $f : [0, \theta[\longrightarrow \Omega$ *pseudo-différentiable telle que*

$$(5) \quad \begin{cases} f(0) = m_0 \in \Omega \quad \text{(donné)} \\ \tilde{T}f(t) = Y(f(t), t) \qquad t \in [0, \theta[\end{cases}$$

Si $c = (U, \varphi, \Delta)$ *est une* δ*-carte de* Ω *et si* $f([0, \theta[) \subset U$ *l'expression locale de (5) est*

$$(6) \quad f_c^{\circ}(t) \equiv \frac{d}{dt} j\, f_c(t) = Y_c(f_c(t), t)$$

avec $f_c = \varphi \circ f$ *et* $Y_c = \tilde{T}\varphi \circ Y \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \varphi(U) \times W$

Il est fréquent que les problèmes d'évolution d "1er ordre en t*" de la théorie des équations aux dérivées partielle se présentent comme des cas particuliers*(*) *de (5). Bien souvent* $\Omega = U$ *ouvert de*

(*) *Nous ne nous préoccupons ici que de l'aspect géométrique, il est bien connu que les théorèmes d'existence donnent souvent des solutions qui ne sont dérivables par rapport à* t *que presque partout (et nécessitent des conditions convenables sur* Y*...).*

l'espace de Banach V avec l'atlas composé de la seule δ-carte $c = (U, \varphi, \Delta)$, $\Delta = (V, W, j)$. (cf. par exemple Lions II ou les travaux de F. Browder).

n° 7. Structure de variété bimodelée sur $T\Omega$.
Calcul différentiel sur les espaces tangents et pseudo-tangents.

Dans le n° 7, on étudie le calcul différentiel sur les espaces tangents et pseudo-tangents d'une variété bimodelée de classe $\mathcal{C}^2$. Dans le cas des variétés ordinaires de dimension finie, cette question a été traitée par KLEIN (cf. C. GODBILLON I) ; sur les variétés bimodelées de très nombreuses propriétés nouvelles apparaissent et nous avons tenté de sélectionner celles qui présentent de l'intérêt en Mécanique Analytique.

(1) $\dot{+}$ désigne une catégorie de δ-couples stricts d'espaces de Banach.

$\dot{+} \times \dot{+}$ désigne la catégorie des δ-couples stricts $\Delta^2 = \Delta \times \Delta = (V \times V, W \times W, j \times j)$ avec $\Delta = (V, W, j)$ dans $\dot{+}$ et telle que les morphismes de Δ_α^2 à Δ_β^2 soient les couples (F, G) où

$$F : V_\alpha \times V_\alpha \longrightarrow V_\beta \times V_\beta \; : (v_1, v_2) \rightsquigarrow (f(v_1), f(v_2) + h(v_1))$$
$$G : W_\alpha \times W_\alpha \longrightarrow W_\beta \times W_\beta \; : (w_1, w_2) \rightsquigarrow (g(w_1), g(w_2) + k(w_1))$$

avec $(f, g) \in Mor(\Delta_\alpha, \Delta_\beta)$, $h \in \mathcal{L}(V_\alpha, V_\beta)$, $k \in \mathcal{L}(W_\alpha, W_\beta)$ et $k \circ j_\alpha = j_\beta \circ h$.

En particulier, on a donc :

$$G \circ (j_\alpha \times j_\alpha) = (j_\beta \times j_\beta) \circ F$$

La propriété suivante joue un rôle important :

(2) Soient Δ_1 et Δ_2 des δ-couples de $\dot{+}$, U_1 un ouvert de V_1, $f : U_1 \longrightarrow V_2$ une application bidifférentiable de classe $\mathcal{C}^2$, alors $Tf : U_1 \times V_1 \longrightarrow V_2 \times V_2$ est bidifférentiable et de classe $\mathcal{C}^1$ et

$\tilde{T}\,Tf : (U_1 \times V_1) \times (W_1 \times W_1) \longrightarrow (V_2 \times V_2) \times (W_2 \times W_2)$ est définie par

$$\tilde{T}\,Tf((x, u), (w_1, w_2)) = ((f(x), f'(x)u), (f^\rho(x)w_1, f^\rho(x)w_2 + f^{\rho\prime}(x)(u, w_1)))$$

Autrement dit,

$$Tf^\rho(x, u) : W_1 \times W_1 \longrightarrow W_2 \times W_2 :$$
$$(w_1, w_2) \rightsquigarrow (f^\rho(x)w_1, f^\rho(x)w_2 + f^{\rho\prime}(x)(u, w_1)).$$

Démonstration :

En vertu de l'unicité de la pseudo-différentielle, il suffit de montrer que pour $v_1, v_2 \in V_1$

$$(f^\circ(x) j_1 v_1,\ f^\circ(x) j_1 v_2 + f^\circ{}'(x)(u, j_1 v_1))$$
$$= (j_2 \times j_2)(f'(x) v_1,\ f'(x) v_2 + f''(x)(u, v_1))$$

ce qui résulte des relations $f^\circ(x) \circ j_1 = j_2 \circ f'(x)$ *et (6) du n° 1. De plus, on vérifie bien que*

$$(Tf'(x,u),\ Tf^\circ(x,u)) \in Mor(\Lambda_1, \Lambda_2) .$$

On peut remarquer que, si dans Tf° *la différentiation précède la pseudo-différentiation, il apparaît cependant dans l'expression de* Tf° *la seule application* $f^\circ{}'$ *et l'existence de* Tf° *ne nécessite pas la définition de* f'°.

Si l'on considère une variété bimodelée dans $\dot{+}$ *et de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* Ω *et un atlas* $\mathcal{A}$ *de* Ω

$$\mathcal{A}_2 = \{c \times c = (p_\Omega^{-1} U,\ T\varphi,\ \Delta^2) \mid c = (U, \varphi, \Delta) \in \mathcal{A}\}$$

est un δ*-atlas de classe* $\mathcal{C}^2$ *dans* $\dot{+} \times \dot{+}$ *sur* $T\Omega$ *; si* $\gamma_{\beta\alpha}$ *est l'application de transition de* c_α *à* c_β *l'application de transition de* $c_\alpha \times c_\alpha$ *à* $c_\beta \times c_\beta$ *est* $T\gamma_{\beta\alpha}$ *bidifférentiable de classe* $\mathcal{C}^1$ *d'après (2).*

Par conséquent, nous avons établi la

Proposition 2 : Soit Ω *une variété bimodelée dans* $\dot{+}$ *et de classe* $\mathcal{C}^2$. *Il existe alors une structure canonique de variété bimodelée dans* $\dot{+} \times \dot{+}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $T\Omega$.

On notera $(\mathcal{C}(T\Omega), \tilde{\mathcal{C}}(T\Omega), L)$ *le* δ*-fibré tangent à la variété bimodelée* $T\Omega$ *et*

$$(3)\quad \mathcal{C}(T\Omega) = (TT\Omega, T\Omega, p_{T\Omega}),\quad \tilde{\mathcal{C}}(T\Omega) = (\tilde{T}T\Omega, T\Omega, \tilde{p}_{T\Omega})$$

Proposition 3 : Dans les hypothèses de la proposition 2, la projection $p_\Omega : T\Omega \longrightarrow \Omega$ *est une application bidifférentiable.*

Démonstration :

Il suffit de raisonner sur les expressions locales dans une δ*-carte*

$c = (U, \varphi, \Delta)$ de Ω :

$$p_\Omega : (x,u) \rightsquigarrow x \qquad Tp_\Omega : ((x,u),(v_1,v_2) \rightsquigarrow (x,v_1) \qquad (c)$$

$$J \circ Tp_\Omega : ((x,u),(v_1,v_2)) \rightsquigarrow (x,jv_1) \qquad (c)$$

On en déduit l'existence de $\tilde{T}\, p_\Omega$ qui est défini dans (c) par :

$$\tilde{T}\, p_\Omega : ((x,u),(w_1,w_2) \rightsquigarrow (x,w_1) \qquad (c)$$

Définition 12 : On appelle fibré tangent à $\mathcal{C}(\Omega)$ le fibré $\mathcal{C}(\mathcal{C}(\Omega)) = (TT\Omega, Tp_\Omega, T\Omega)$. On appelle fibré pseudo-tangent à $\mathcal{C}(\Omega)$ le fibré $\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(\Omega)) = (\tilde{T}T\Omega, \tilde{T}p_\Omega, T\Omega)$.

(Le premier fibré vectoriel est celui de la théorie classique(*). Bien entendu $T\Omega$ et $\tilde{T}\Omega$ sont des variétés de Banach de classe $\mathcal{C}^1$ qui ont des fibrés tangents $\mathcal{C}(T\Omega)$ et $\mathcal{C}(\tilde{T}\Omega)$(**).

Les relations entre ces divers fibrés vectoriels sont traduites par la proposition suivante :

Proposition 4 : Il existe deux isomorphismes canoniques

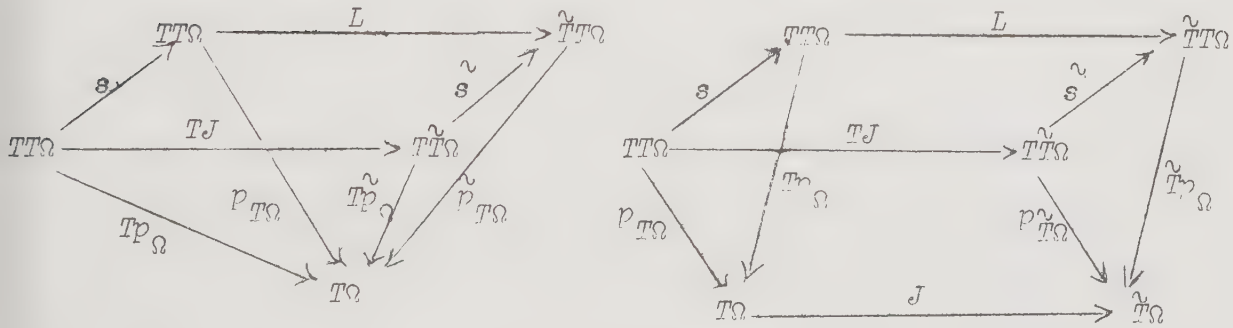
$$s : \mathcal{C}(T\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{C}\Omega) \qquad (id_{T\Omega}\text{-morphisme})$$

$$\tilde{s} : \mathcal{C}(\tilde{T}\Omega) \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{C}\Omega) \qquad (id_{\tilde{T}\Omega}\text{-morphisme})$$

tels que

1°) $s \circ s$ = identité sur $TT\Omega$.

2°) Les diagrammes suivantes sont commutatifs.



(*) Cf. par exemple : C. GODBILLON I pour le cas des variétés différentielles de dimension finie.

(**) Les considérations du n° 7, fondées essentiellement sur la structure de variété bimodelée de Ω, requièrent en conséquence l'usage exclusif des δ-cartes de Ω y compris dans la description des objets correspondant à la théorie classique.

Démonstration :

Il suffit de raisonner sur les expressions locales dans une δ*-carte de* Ω *; si l'on pose :*

$$s : ((x,v),(v_1,v_2)) \rightsquigarrow ((x,v_1),(v,v_2)) \qquad (c)$$

$$\tilde{s} : ((x,w),(v_1,w_2)) \rightsquigarrow ((x,v_1),(w,v_2)) \qquad (c)$$

on vérifie que ces expressions sont compatibles avec les changements de δ*-carte, et la proposition s'en déduit immédiatement.*

Proposition 5 : Soient Ω *et* Ω' *deux variétés bimodelées dans* $\boxplus$ *et de classe* $\mathcal{C}^2$, $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ *une application bidifférentiable et de classe* $\mathcal{C}^2$. *Alors* $Tf : T\Omega \longrightarrow T\Omega'$ *est bidifférentiable (pour les structures canoniques de variétés bimodelées sur* $T\Omega$ *et* $T\Omega'$) *et si* $\tilde{s}$ *et* $\tilde{s}'$ *sont les isomorphismes de la proposition 4 pour* Ω *et* Ω' *respectivement on a :*

$$\tilde{T}Tf \circ \tilde{s} = \tilde{s}' \circ T\tilde{T}f$$

En particulier, si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *et si l'on pose* $d = pr_2 \circ T$, $\tilde{d} = pr_2 \circ \tilde{T}$ *où* $pr_2 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est la projection sur le second facteur :*

$$\tilde{d}df \circ \tilde{s} = d\tilde{d}f$$

Démonstration : On note par des lettres accentuées ce qui est relatif à Ω', *en raisonnant dans des* δ*-cartes on se ramène à démontrer la proposition pour* $f : U \longrightarrow V'$ (U *ouvert de* V) *bidifférentiable et de classe* $\mathcal{C}^2$. *On a alors*

$$Tf((x,v),(v_1,v_2)) = ((f(x),f'(x)v),(f'(x)v_1,f'(x)v_2 + f''(x)(v_1,v))$$

$$L((x,v),(v_1,v_2)) = ((x,v),(jv_1,jv_2)),$$

$$L'((x',v'),(v_1',v_2')) = ((x',v'),(j'v_1',jv_2'))$$

où $x \in U$, v_1, v_1, $v_2 \in V$ *et* x', v', v_1', $v_2' \in V'$. *Dans ces conditions*

$$L' \circ TTf((x,v),(v_1,v_2)) = ((f(x),f'(x)v),(j'f'(x)v_1,j'f'(x)v_2+j'f''(x)(v_1,v)))$$

$$= ((f(x),f'(x)v),(f'(x)jv_1,f'(x)jv_2+f''(x)(v,jv_1)))$$

$$= \tilde{T}Tf \circ L((x,v),(v_1,v_2))$$

si $\tilde{T}Tf$ *est défini (localement) par :*

$$T\tilde{T}f((x,v),(w_1,w_2)) = ((f(x),f'(x)v),(f'(x)w_1,f'(x)w_2+f''(x)(v,w_1))),$$

ce qui établit la bidifférentiabilité de Tf. *De plus*

$$T\tilde{T}f((x,w),(v_1,w_2)) = ((f(x),f'(x)w),(f'(x)v_1,f'(x)w_2+f''(x)(v_1,w))),$$

la relation $\tilde{T}Tfo\tilde{s}((x,w),(v_1,w_2)) = \tilde{s}'oT\tilde{T}f((x,w),(v_1,w_2))$ *est alors immédiate.*

Le cas particulier où $\Omega' = \mathbb{R}$ *ne soulève pas de difficultés.*

Champs canoniques de Liouville.

Soit $V : T\Omega \longrightarrow TT\Omega$ *le champ canonique sur la variété* $T\Omega$, *on a le résultat suivant :*

Proposition 6 : Si Ω *est une variété bimodelée dans* $\mathcal{E}$ *et de classe* $\mathcal{C}^2$, *il existe un champ de vecteurs* W *sur la variété* $\tilde{T}\Omega$ *unique et tel que :*

$$(4) \qquad WoJ = TJoV$$

Démonstration :

D'après le principe de prolongement des identités si le champ W *existe, il est unique. Or dans une* δ*-carte* $c = (U,\varphi,\Delta)$

$$V(m,v) = ((m,v),(o,v)) \quad où \quad v = pr_2\, T\varphi(m,v) \qquad (c) \quad (*)$$

$$TJ((m,v),(v_1,v_2)) = (J(m,v),(v_1,jv_2))$$

Si, dans chaque δ*-carte on définit* W *par*

$$W(m,w) = ((m,w),(o,w)) \quad où \quad w = pr_2\, \tilde{T}\varphi(m,w) \qquad (c) \quad (*)$$

expression compatible avec les changements de δ*-carte, la relation (4) a lieu.*

Dans les conditions de la proposition 6, on a la propriété suivante :

(5) Si $f : \tilde{T}\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *est différentiable sur chaque fibre de* $\tilde{\mathcal{D}}(\Omega)$ *alors* $foJ : T\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *est différentiable sur chaque fibre de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *et*

$$V.(foJ) = (W.f)oJ$$

Démonstration :

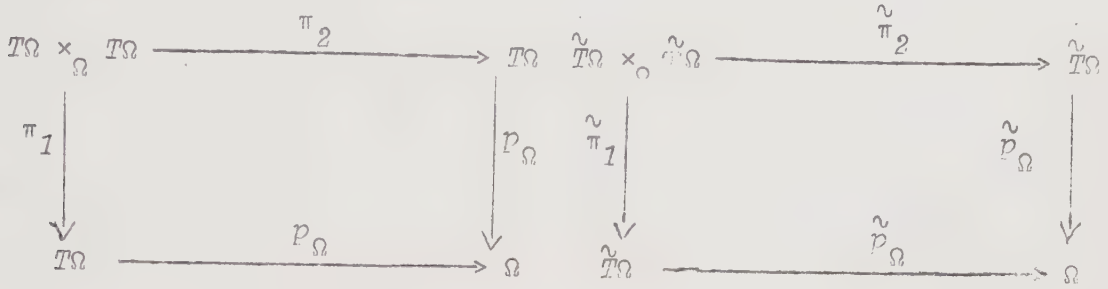
La proposition se ramène localement au cas où $f : U\times W \longrightarrow \mathbb{R}$ *et dans ces conditions :*

$$V.(foJ)(m,v) = \partial_2 f(x,jv)(jv) = (W.f)oJ(m,v)\,((x,v) = T\varphi(m,v))$$

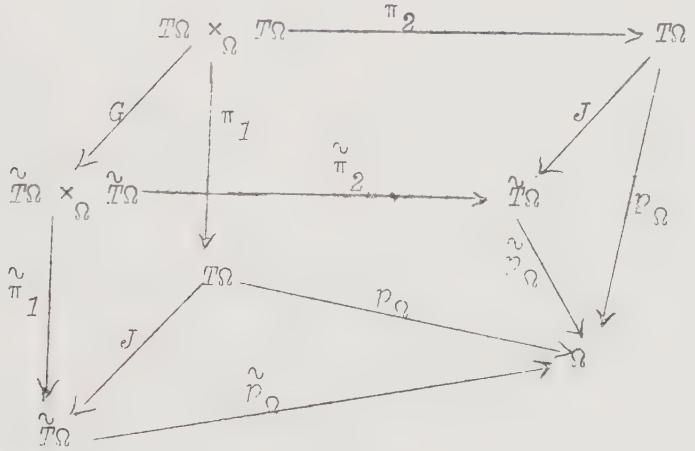
(*) *On note* (m,v) *un vecteur tangent à* Ω *en* m, (m,w) *un vecteur pseudo-tangent à* Ω *en* m.

Les fibrés $\tilde{p}_\Omega^* \tilde{\mathcal{C}}(\Omega)$, $\mathcal{C}(\tilde{T}\Omega)$ *et les homomorphismes canoniques.*

Construisons les fibrés images réciproques $p_\Omega^* \mathcal{C}(\Omega)$ *et* $\tilde{p}_\Omega^* \tilde{\mathcal{C}}(\Omega)$ *; l'espace total de* $p_\Omega^* \mathcal{C}(\Omega)$ *est* $T\Omega \times_\Omega T\Omega$ (*), *l'espace total de* $\tilde{p}_\Omega^* \tilde{\mathcal{C}}(\Omega)$ *est* $\tilde{T}\Omega \times_\Omega \tilde{T}\Omega$ (*). *Si* π_1 *et* π_2 *(resp :* $\tilde{\pi}_1$ *et* $\tilde{\pi}_2$*) sont les restrictions à* $T\Omega \times_\Omega T\Omega$ *(resp :* $\tilde{T}\Omega \times_\Omega \tilde{T}\Omega$*) des projections naturelles des ensembles produits, on a les diagrammes commutatifs suivants :*



De plus, il existe un J-morphisme canonique $G : p_\Omega^* \mathcal{C}(\Omega) \longrightarrow \tilde{p}_\Omega^* \tilde{\mathcal{C}}(\Omega)$ *tel que le diagramme suivant commute :*



Dans une δ*-carte de* Ω *:* $G : (x, v_1, v_2) \rightsquigarrow (x, jv_1, jv_2)$.

Proposition 7 : Si Ω *est une variété bimodelée dans* $\mathbb{E}$ *et de classe* $\mathcal{C}^2$ *il existe*

$\lambda : p_\Omega^* \mathcal{C}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}(T\Omega)$ $\quad (id_{T\Omega}\text{-morphisme})$

$\tilde{\lambda} : \tilde{p}_\Omega^* \tilde{\mathcal{C}}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}(\tilde{T}\Omega)$ $\quad (id_{\tilde{T}\Omega}\text{-morphisme})$

tels que $\tilde{\lambda} \circ G = TJ \circ \lambda$

(*) *Par exemple* $\tilde{T}\Omega \times_\Omega \tilde{T}\Omega$ *est le sous-ensemble* $\{(m, \vec{w}, \vec{w}) \mid (m, \vec{w}) \in \tilde{T}\Omega, (m, \vec{w}) \in \tilde{T}\Omega\}$ *de* $\tilde{T}\Omega \times \tilde{T}\Omega$.

Démonstration :

L'existence de λ *est classique pour une variété ; dans une* δ*-carte* c *:*

$$(x,v_1,v_2) = ((x,v_1),(o,v_2)),\ TJ(x,v),(v_1,v_2)) = ((x,jv),(v_1,jv_2)) \quad (c)$$

On en déduit aisément que si $\tilde{\lambda}$ *existe elle vérifie nécessairement*

$$\tilde{\lambda}(x,w_1,w_2) = ((x,w_1),(o,w_2)) \qquad (c)$$

On vérifie alors que cette formule est compatible avec les changements de δ*-carte ce qui établit l'existence de* $\tilde{\lambda}$*. La relation* $\tilde{\lambda}oG = TJo\lambda$ *est immédiate localement. De plus, on a les diagrammes commutatifs suivants :*

$$\begin{array}{ccc} TT\Omega & \xrightarrow{Tp_\Omega} & \Omega \\ \downarrow{\scriptstyle p_{T\Omega}} & & \downarrow{\scriptstyle p_\Omega} \\ T\Omega & \xrightarrow{p_\Omega} & \Omega \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T\tilde{T}\Omega & \xrightarrow{J_\Omega oT\tilde{p}_\Omega} & \tilde{T}\Omega \\ \downarrow{\scriptstyle p_{\tilde{T}\Omega}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{p}_\Omega} \\ \tilde{T}\Omega & \xrightarrow{\tilde{p}_\Omega} & \Omega \end{array}$$

où Tp_Ω *(resp :* $JoT\tilde{p}_\Omega$*) est un morphisme de* $\mathcal{C}(T\Omega)$ *dans* $\mathcal{C}(\Omega)$ *(resp :* $\mathcal{C}(\tilde{T}\Omega)$ *dans* $\tilde{\mathcal{C}}(\Omega)$*). D'après la propriété universelle des fibrés images réciproques, il existe deux morphismes :*

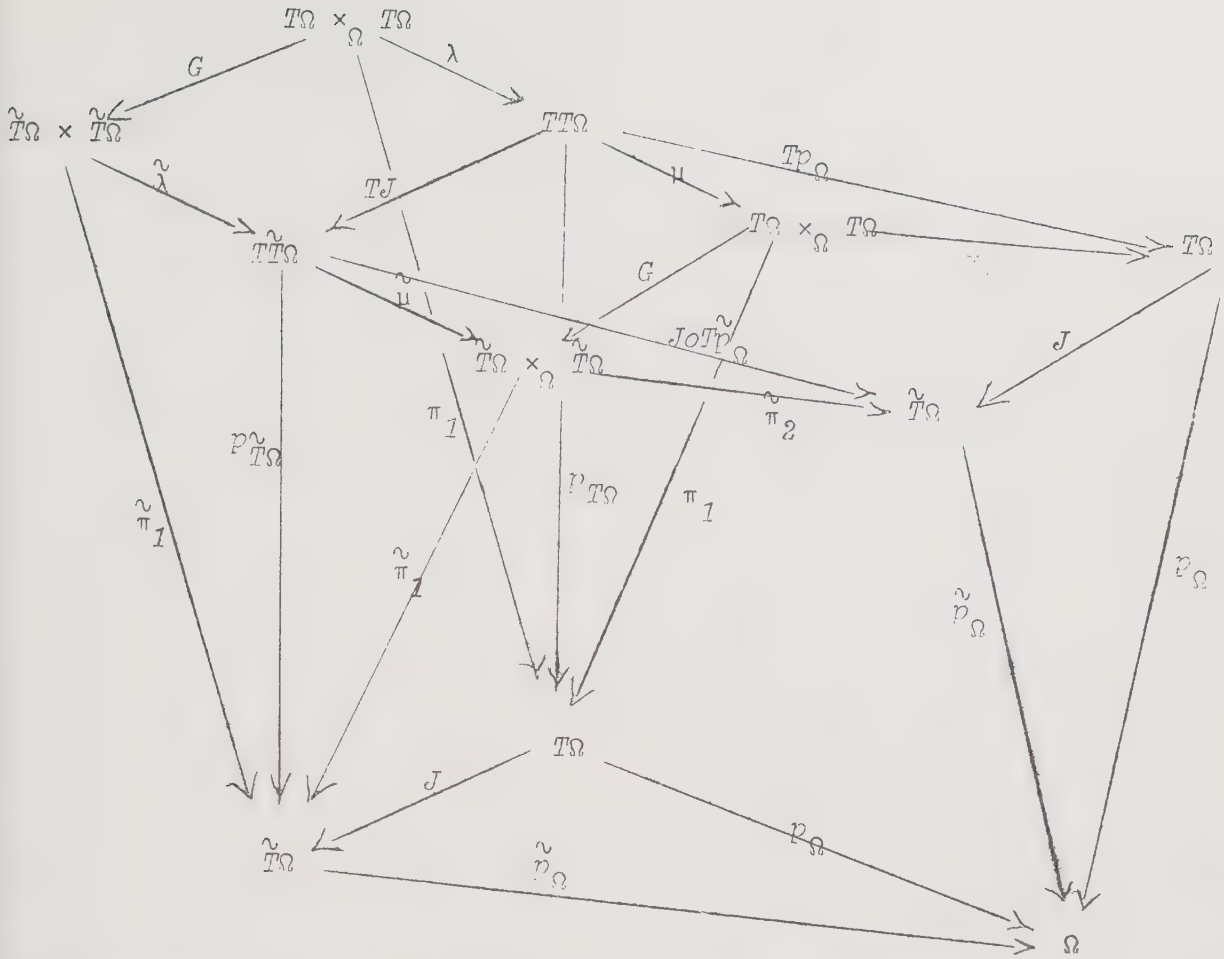
$$\mu : \mathcal{C}(T\Omega) \longrightarrow p_\Omega^*\mathcal{C}(\Omega)(id_{T\Omega}\text{-morphisme}),$$

$$\tilde{\mu} : \mathcal{C}(\tilde{T}\Omega) \longrightarrow \tilde{p}_\Omega^*(\Omega)(id_{\tilde{T}\Omega}\text{-morphisme})$$

représentés dans une δ*-carte de* Ω *par*

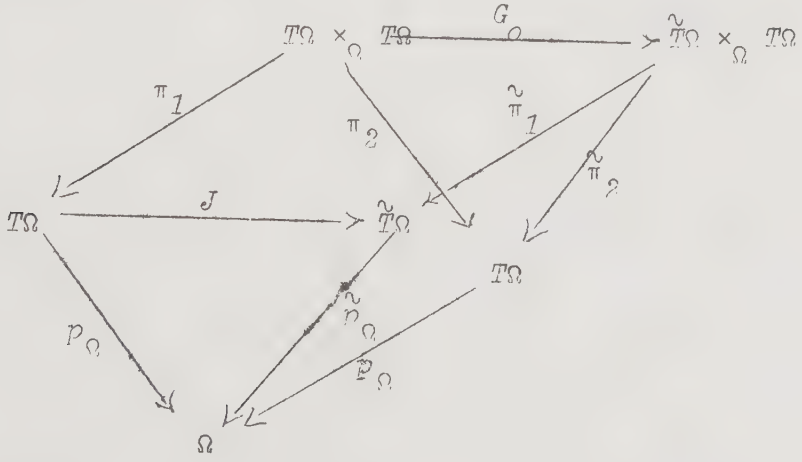
$$\mu((x,v),(v_1,v_2)) = (x,v,v_1) \quad \text{et} \quad \tilde{\mu}((x,w),(v_1,w_1)) = (x,w,jv_1)$$

et tels qu'en définitive, on ait le diagramme commutatif suivant :



Les fibrés $\tilde{p}_\Omega^* \mathcal{C}(\Omega)$ *et* $\mathcal{C}(\tilde{T}\Omega)$ *et les homomorphismes canoniques.*

Il est possible de reprendre les considérations précédentes, en remplaçant le fibré $\tilde{p}_\Omega^* \tilde{\mathcal{C}}(\Omega)$ *par* $\tilde{p}_\Omega^* \mathcal{C}(\Omega)$. *On met d'abord en évidence un J-morphisme canonique* $G_o : p_\Omega^* \mathcal{C}(\Omega) \longrightarrow \tilde{p}_\Omega^* \mathcal{C}(\Omega)$ *tel que le diagramme suivant commute :*



Dans une δ*-carte de* Ω : $G_o : (x, v_1, v_2) \rightsquigarrow (x, jv_1, v_2)$.

Proposition 8 :

Si Ω *est une variété bimodelée dans* $\boxed{+}$ *et de classe* $\mathcal{C}^2$, *il existe* $\bar{\lambda} : \tilde{p}_\Omega^* \mathcal{C}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}(\tilde{T}\Omega)$ ($id_{\tilde{T}\Omega}$-*morphisme*) *tel que*

$$\bar{\lambda} \circ G_o = TJ \circ \lambda$$

Démonstration analogue à celle de la proposition 7 :

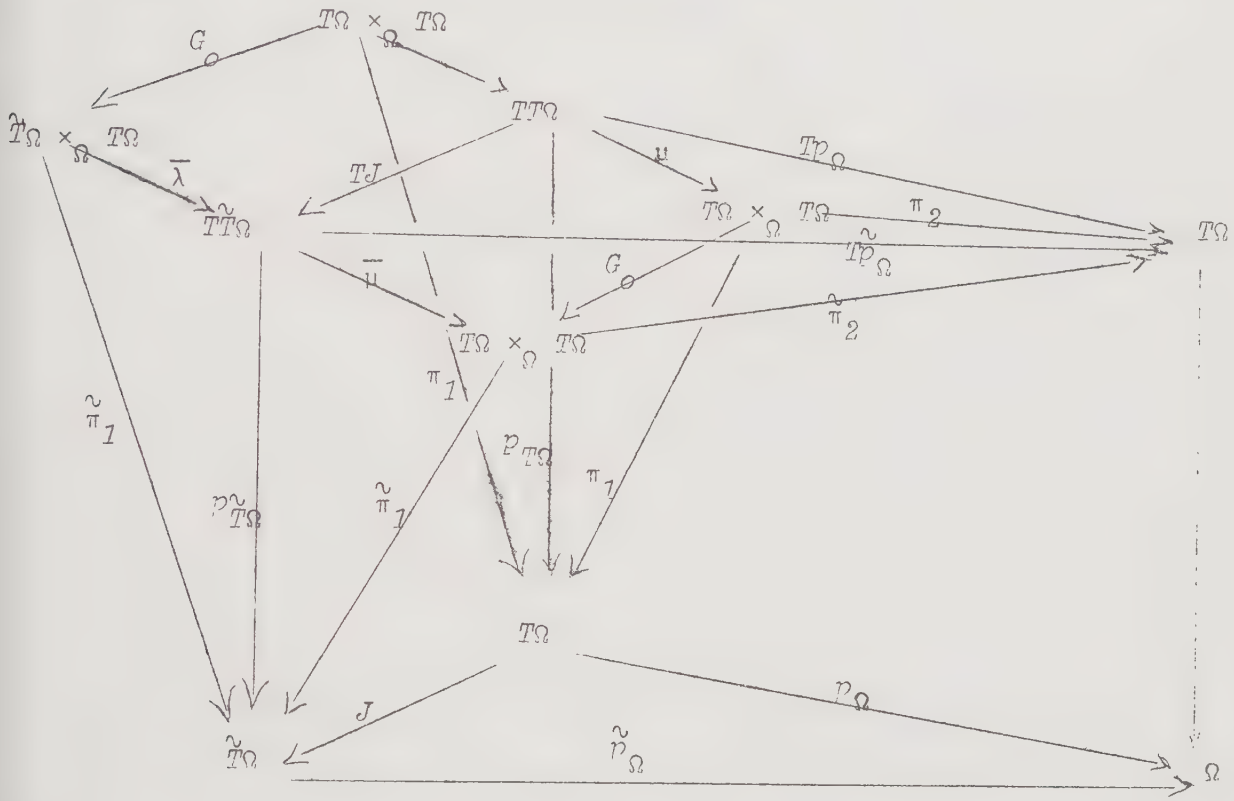
Dans une δ-carte de Ω

$$\bar{\lambda}(x,w,v_1) = ((x,w),(o,jv_1))$$

On construit ensuite à l'aide de la propriété universelle, des fibrés images réciproques le morphisme

$$\bar{\mu} : \mathcal{C}(\tilde{T}\Omega) \longrightarrow \tilde{p}_\Omega^{*}\mathcal{C}(\Omega) \quad (id_{\tilde{T}\Omega}\text{-morphisme})$$

représenté dans une δ-carte de Ω par $\bar{\mu}((x,w),(v_1,w_1)) = (x,w,v_1)$ *et tel qu'on ait le diagramme commutatif suivant :*



Les Endomorphismes verticaux.

On sait que la suite $0 \longrightarrow p_\Omega^{*}\mathcal{C}(\Omega) \xrightarrow{\lambda} \mathcal{C}(T\Omega) \xrightarrow{\mu} p_\Omega^{*}\mathcal{C}(\Omega) \longrightarrow 0$ *est exacte, par contre dans les diagrammes*

$$\tilde{p}_\Omega^{*}\mathcal{C}(\Omega) \xrightarrow{\bar{\lambda}} \mathcal{C}(\tilde{T}\Omega) \xrightarrow{\bar{\mu}} \tilde{p}_\Omega^{*}\mathcal{C}(\Omega)$$

$$\tilde{p}_\Omega^{*}\tilde{\mathcal{C}}(\Omega) \xrightarrow{\tilde{\lambda}} \mathcal{C}(\tilde{T}\Omega \xrightarrow{\tilde{\mu}} \tilde{p}_\Omega^{*}\tilde{\mathcal{C}}(\Omega)$$

$\bar{\mu}$ *est un morphisme surjectif,* $\tilde{\lambda}$ *est un morphisme injectif dont l'image est le noyau de* $\tilde{\mu}$*, mais l'image de l'injection* $\bar{\lambda}$ *est dense dans le noyau de* $\bar{\mu}$ *et l'image de* $\tilde{\mu}$ *est dense dans* $\tilde{T}\Omega \times_\Omega \tilde{T}\Omega$ *;*
on a les relations

$$\mu o \lambda = o, \quad \bar{\mu} o \bar{\lambda} = 0, \quad \tilde{\mu} o \tilde{\lambda} = 0$$

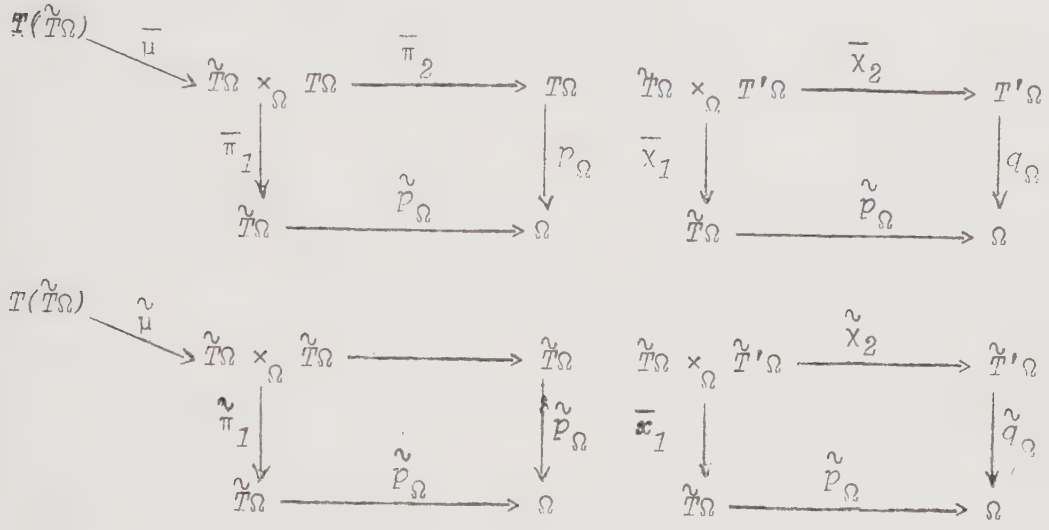
Définition 13 : On appelle endomorphismes verticaux, les deux endomorphismes $v = \lambda o \mu$ de $\mathcal{C}(T\Omega)$ et $\tilde{v} = \tilde{\lambda} o \tilde{\mu} = \overline{\lambda} o \overline{\mu}$ de $\mathcal{C}(\tilde{T}\Omega)$.

La relation $\overline{\lambda} o \overline{\mu} = \tilde{\lambda} o \tilde{\mu}$ se vérifie aisément dans une δ-carte c de Ω :

$$v : ((x,v_1),(v,v_2)) \rightsquigarrow ((x,v_1),(0,v)) \qquad (c)$$
$$\tilde{v} : ((x,w_1),(v,w_2)) \rightsquigarrow ((x,w_1),(0,jv)) \qquad (c)$$

Formes de Pfaff semi-basiques sur $\tilde{T}\Omega$+

Considérons, d'une part les fibrés $\tilde{p}_\Omega^* \mathcal{C}(\Omega)$ et $\tilde{p}_\Omega^* \mathcal{C}'(\Omega)$; d'autre part, les fibrés $\tilde{p}_\Omega^* \tilde{\mathcal{C}}(\Omega)$ et $\tilde{p}_\Omega^* \tilde{\mathcal{C}}'(\Omega)$ ainsi que les diagrammes commutatifs auxquels ils donnent lieu :



Les fonctions $\langle \overline{\chi}_2, \overline{\pi}_2 \rangle : (\tilde{T}\Omega \times_\Omega T'\Omega) \times_{\tilde{T}\Omega} (\tilde{T}\Omega \times_\Omega T\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$: ((w_o, v'),(w_o, \tilde{v})) \rightsquigarrow \langle v', v \rangle$$

$$\langle \tilde{\chi}_2, \tilde{\pi}_2 \rangle : (\tilde{T}\Omega \times_\Omega \tilde{T}'\Omega) \times_{\tilde{T}\Omega} (\tilde{T}\Omega \times_\Omega \tilde{T}\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$: ((w_o, w'),(w_o, \tilde{w})) \rightsquigarrow \langle w', \tilde{w} \rangle$$

où à droite figurent la dualité entre $T'_m\Omega$ et $T_m\Omega$ d'une part et entre $\tilde{T}'_m\Omega$ et $\tilde{T}_m\Omega$ d'autre part ($m = p_\Omega V = q_\Omega v' = \tilde{p}_\Omega \tilde{w} = \tilde{q}_\Omega \tilde{w}' = \tilde{p}_\Omega w_o$), déterminent respectivement un isomorphisme de $\tilde{p}_\Omega^* \mathcal{C}'(\Omega)$ sur $\tilde{p}_\Omega^* \mathcal{C}(\Omega)'$ et un isomorphisme de $\tilde{p}_\Omega^* \tilde{\mathcal{C}}'(\Omega)$ sur $\tilde{p}_\Omega^* \tilde{\mathcal{C}}(\Omega)'$. Or, on a mis en évidence un morphisme canonique $\overline{\mu} : \mathcal{C}(\tilde{T}\Omega) \longrightarrow \tilde{p}_\Omega^* \mathcal{C}(\Omega)$ tel que $T\tilde{p}_\Omega = \overline{\pi}_2 o \overline{\mu}$, par suite si ω est une forme de Pfaff sur $\tilde{T}\Omega$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) *Il existe une section* α *de* $\tilde{p}_\Omega^* \mathcal{C}'(\Omega)$ *telle que*

$$\omega(X) = \langle \alpha(p_{\tilde{T}\Omega}(X)), \bar{\mu}(X) \rangle$$

(pour la dualité de $\tilde{p}_\Omega^* \mathcal{C}'(\Omega)$ *et* $\tilde{p}_\Omega^* \mathcal{C}(\Omega)$*)*

(b) *Il existe une application* $F : \tilde{T}\Omega \longrightarrow T'\Omega$ *telle que*

$$q_\Omega \circ F = \tilde{p}_\Omega$$

$$\omega(X) = \langle F(p_{\tilde{T}\Omega}(X)), T\tilde{p}_\Omega(X) \rangle$$

(pour la dualité de $\mathcal{C}'(\Omega)$ *et* $\mathcal{C}(\Omega)$*).*

De même, on a mis en évidence un morphisme canonique $\tilde{\mu} : \mathcal{C}(\tilde{T}\Omega) \longrightarrow \tilde{p}_\Omega^* \tilde{\mathcal{C}}(\Omega)$ *tel que* $J\circ T\tilde{p}_\Omega = \tilde{\pi}_2 \circ \tilde{\mu}$*, par suite si* θ *est une forme de Pfaff sur* $\tilde{T}\Omega$*, les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

(c) *Il existe une section* β *de* $\tilde{p}_\Omega^* \tilde{\mathcal{C}}'(\Omega)$ *telle que*

$$\theta(X) = \langle \beta(p_{\tilde{T}\Omega}(X)), \tilde{\mu}(X) \rangle$$

(pour la dualité de $\tilde{p}_\Omega^* \tilde{\mathcal{C}}'(\Omega)$ *et* $\tilde{p}_\Omega^* \tilde{\mathcal{C}}(\Omega)$*)*

(d) *Il existe une application* $D : \tilde{T}\Omega \longrightarrow \tilde{T}'\Omega$ *telle que*

$$\tilde{q}_\Omega \circ D = \tilde{p}_\Omega$$

$$\theta(X) = \langle D(p_{\tilde{T}\Omega}(X)), J\circ T\tilde{p}_\Omega(X) \rangle$$

(pour la dualité de $\tilde{\mathcal{C}}'(\Omega)$ *et* $\tilde{\mathcal{C}}(\Omega)$*)*

Définition 14 :

- *Les formes* ω *sur* $\tilde{T}\Omega$ *qui vérifient les conditions équivalentes (a) et (b) sont appelées formes semi-basiques de 1ère espèce sur* $\tilde{T}\Omega$*.*
- *Les formes* θ *sur* $\tilde{T}\Omega$ *qui vérifient les conditions équivalentes (c) et (d) sont appelées formes semi-basiques de 2ème espèce sur* $\tilde{T}\Omega$*.*

Si θ *est semi-basique de 2ème espèce, alors* θ *est aussi semi-basique de 1ère espèce car dans les conditions de (d) :*

$\theta(X) = \langle {}^t J\circ D(p_{\tilde{T}\Omega}(X)), T\tilde{p}_\Omega(X) \rangle$ *(bien entendu la réciproque est inexacte).*

Proposition 8 : *Pour qu'une forme de Pfaff* ω *sur* $\tilde{T}\Omega$ *soit semi-basique de 1ère espèce sur* $\tilde{T}\Omega$ *il faut et il suffit que* ω *soit nulle sur l'image de l'endomorphisme vertical* $\tilde{v}$.

Démonstration immédiate avec le principe de prolongement des identités.

Proposition 9 : *Soient* ℓ_o *la forme de Liouville sur* $T'\Omega$, ℓ *la forme de Liouville sur* $\tilde{T}'\Omega$, *alors*

- *dans les conditions de (b) si* F *est différentiable, on a* $F^*\ell_o = \omega$
- *dans les conditions de (d) si* D *est différentiable, on a* $D^{*\sim}\ell = \theta$.

Démonstration :

Les formes canoniques ℓ_o *et* $\tilde{\ell}$ *sont définies par (cf. §3, n° 2)*

$$\ell_o(u) = \langle p_{T'\Omega}(u),\ Tq_\Omega(u) \rangle \qquad u \in TT'\Omega$$

$$\ell(u) = \langle p_{\tilde{T}'\Omega}(u),\ Jo\tilde{T}\tilde{q}_\Omega(u) \rangle \qquad u \in T\tilde{T}'\Omega,$$

alors, dans les conditions de (b)

$$\omega(X) = \langle p_{T'\Omega} oTF(X),\ Tq_\Omega oTF(X) \rangle = F^*\ell_o(X),$$

dans les conditions de (d)

$$\theta(X) = \langle p_{\tilde{T}'\Omega} oTD(X),\ Jo\tilde{T}\tilde{q}_\Omega oTD(X) \rangle = D^*\tilde{\ell}(X).$$

Expressions locales des formes semi-basiques sur $\tilde{T}\Omega$.

Soit $c = (U,\varphi,\Delta)$, $\Delta = (V,W,j)$ *une* δ*-carte de* Ω, *dans les conditions de (b) et (d)*

$$\omega(X) = \langle F_c(x,w),v \rangle,\quad \theta(X) = \langle D_c(x,w),jv \rangle \quad si \quad ((x,w),(v,w_1)) = X \qquad (c)$$

où $F_c : \varphi(U) \times W \longrightarrow V'$, $D_c : \varphi(U) \times W \longrightarrow W'$.

Exemple de forme semi-basique sur $\tilde{T}\Omega$.

Soit $f : \tilde{T}\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application différentiable, alors la différentielle verticale de* f *définie par :*

$$d_{\tilde{v}}f(X) = df(\tilde{v}(X))$$

détermine une forme semi-basique de 2ème espèce sur $\tilde{T}\Omega$ *dont l'expression locale dans* $c = (U,\varphi,\Delta)$ *est*

$$d_{\tilde{v}}f : ((x,w),(v,w_1)) \rightsquigarrow \frac{\partial f_c}{\partial W}(x,w)(jv) \qquad (c)$$

n° 8. Structures affaiblies d'une variété bimodelée.

On reprend les notations $\dot{+}$, Γ_1, Γ_2, $G = (G_1, G_2)$ du n° 4. Si l'on donne un foncteur de Mackey $\mathcal{M}'$ sur Γ_2 (cf. §1, n° 5) les δ-couples stricts $\Delta_{\mathcal{M}'} = (V, W_{\mathcal{M}'}, j)$ où (V, W, j) décrit $\dot{+}$. forment une catégorie $\dot{+}_{\mathcal{M}'}$ dont les morphismes sont, par définition, les mêmes couples d'applications que les morphismes de $\dot{+}$. On définit alors $\mathcal{C} = (G_1, \mathcal{C}_2)$ par $\mathcal{C}_2(W_{\mathcal{M}'}) = G_2(W)$ pour W dans Γ_2.

Soit Ω une variété bimodelée dans $\dot{+}$ et de classe $\mathcal{C}_\sigma$ dont un δ-atlas est $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha, \Delta_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{J}\}$, alors

$$\mathcal{A}_{\mathcal{M}'} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha, \Delta_{\alpha\mathcal{M}'}) \mid \alpha \in \mathcal{J}\}$$

est un δ-atlas qui détermine sur Ω une structure de variété bimodelée de classe $\mathcal{C}_\mathcal{C}$. De plus, compte tenu de la définition des morphismes de $\dot{+}_{\mathcal{M}'}$ et de $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_{\mathcal{M}'}$ sont maximaux simultanément, c'est-à-dire que les δ-cartes de la structure de variété bimodelée déterminée par $\mathcal{A}_{\mathcal{M}'}$ sont aussi les δ-cartes de la structure déterminée par $\mathcal{A}$.

En particulier si Γ_2 est formée d'e.l.c. ayant leur topologie de Mackey (e.l.c. tonnelés ou métrisables, espaces de Banach en particulier) et si les morphismes de Γ_1 et Γ_2 sont les applications linéaires continues :

$Mor(\Delta_1, \Delta_2) = Mor(\Delta_{1\mathcal{M}'}, \Delta_{2\mathcal{M}'})$ est l'ensemble des couples (h, ℓ) tels que

$$h \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$$
$$\ell \in \mathcal{L}(W_1, W_2) = \mathcal{L}(W_{1\mathcal{M}'}, W_{2\mathcal{M}'}) \quad \text{(cf. §1, n° 5)}$$
$$\ell \circ j_1 = j_2 \circ h.$$

Définition 15 : La structure de variété bimodelée déterminée par $\mathcal{A}_{\mathcal{M}'}$ est appelée $\mathcal{M}'$-structure de variété bimodelée sur Ω associée à la structure initiale. En particulier si $\mathcal{M}'(E)$ = ensemble des enveloppes convexes équilibrées des parties finies de E' ; la $\mathcal{M}'$-structure est appelée structure affaiblie de la variété bimodelée Ω. Le δ-fibré vectoriel tangent à Ω muni de sa $\mathcal{M}'$-structure n'est autre que $(\mathcal{E}(\Omega), \widetilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{M}'}(\Omega), J)$ et $(\mathcal{E}(\Omega), \widetilde{\mathcal{E}}_\sigma(\Omega), J)$ pour la structure affaiblie.

L'intérêt de ces structures est de permettre de définir une classe plus large d'applications pseudo-différentiables que la classe associée à la structure de variété bimodelée initiale. Voici le cas particulier utile pour la suite : on suppose que :

(1) Si W est un e.l.c. de Γ_2 alors tout arc continu compact de W_σ est contenu dans un ensemble de $\mathcal{G}_2(W)$.

Ceci est en particulier vérifié si $\mathcal{G}_2(W)$ est l'ensemble des parties bornées de W.

Définition 16 : Soit Ω une variété bimodelée dans $\mathcal{F}$ et de classe $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ la propriété (1) ayant lieu, I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que $f : I \longrightarrow \Omega$ est faiblement pseudo-différentiable si f et pseudo-différentiable lorsque Ω est muni de sa structure affaiblie.

Proposition 10 : Pour que $f : I \longrightarrow \Omega$ soit faiblement pseudo-différentiable, il faut et il suffit que pour chaque $t_o \in I$ l'une des conditions équivalentes suivantes ait lieu :

(a) Il existe une δ-carte de Ω en $f(t_o)$ (U,φ,Δ) telle que l'application $jo\varphi of$ à valeurs dans W_σ soit différentiable en t_o.

(b) Pour toute δ-carte de Ω en $f(t_o)$ (U,φ,Δ) l'application $jo\varphi of$ à valeurs dans W_σ est différentiable en t_o.

(Démonstration immédiate compte tenu des résultats du n° 2).

n° 9. Sous-variétés bimodelées.

Posons d'abord une définition

Définition 17 : Soient $\Delta_1 = (V_1, W_1, j_1)$ et $\Delta_2 = (V_2, W_2, j_2)$ des δ-couples d'e.l.c., on appelle δ-couple produit de Δ_1 et Δ_2 le δ-couple d'e.l.c.

$$\Delta_1 \times \Delta_2 = (V_1 \times V_2,\ W_1 \times W_2,\ j_1 \times j_2)$$

$\Delta_1 \times \Delta_2$ est strict si Δ_1 et Δ_2 sont stricts.

Considérons maintenant une variété bimodelée dans une catégorie $\mathcal{F}$ de δ-couples d'espaces de Banach et de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$, et une partie Ω_1 de Ω. On suppose que les morphismes de Γ_1 et Γ_2 sont les applications linéaires continues (notations du §1, n° 2) et que la condition suivante a lieu :

(S.V) Pour tout $m \in \Omega_1$ il existe une δ-carte en m de Ω dans $\mathcal{F}$ de la forme $(U,\varphi,\Delta_1 \times \Delta_2)$ avec

- $\varphi(U \cap \Omega_1) \subset V_1 \times \{a_2\}$ où $a_2 \in V_2$
- L'application induite $\varphi_1 : U \cap \Omega_1 \longrightarrow V_1$ est un homéomorphisme de $U \cap \Omega_1$ sur un ouvert de V_1.

Les δ-cartes de Ω vérifiant la condition figurant dans (S.V) pour un $m \in \Omega_1$ seront dites adaptées à Ω_1.

Proposition 11 : Si la condition (S.V) a lieu, les δ-cartes $(U \cap \Omega_1, \varphi_1, \Delta_1)$ de Ω_1 correspondant aux δ-cartes adaptées à Ω_1 définissent une structure de variété bimodelée de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω_1.

Démonstration :

Il faut montrer que si $c_\alpha = (U_\alpha, \varphi_\alpha, \Delta_{\alpha 1} \times \Delta_{\alpha 2})$, $c_\beta = (U_\beta, \varphi_\beta, \Delta_{\beta 1} \times \Delta_{\beta 2})$ sont deux δ-cartes adaptées telles que $U_\alpha \cap U_\beta \cap \Omega_1 \neq \emptyset$ alors l'application de transition induite $\gamma_{1\beta\alpha} : \varphi_{1\alpha}(U_\alpha \cap U_\beta \cap \Omega_1) \longrightarrow \varphi_{1\beta}(U_\alpha \cap U_\beta \cap \Omega_1)$ est bidifférentiable et de classe $\mathcal{C}^k$ (pour les δ-couples $\Delta_{\alpha 1}$ et $\Delta_{\alpha 2}$) or, dans la décomposition

$$\gamma_{1\beta\alpha} : \varphi_{1\alpha}(U_\alpha \cap U_\beta \cap \Omega_1) \longrightarrow V_{\alpha 1} \times V_{\alpha 2} \xrightarrow{\gamma_{\beta\alpha}} V_{\beta 1} \times V_{\beta 2} \longrightarrow \varphi_{1\beta}(U_\alpha \cap U_\beta \cap \Omega_1)$$

où la première application est $x_1 \rightsquigarrow (x_1, a_{\alpha 2})$ et la troisième application est la projection sur le premier facteur, les trois applications sont bidifférentiables et de classe $\mathcal{C}^k$, il en va de même de $\gamma_{1\beta\alpha}$ d'après le n° 1 (2).

Définition 18 : Une sous-variété bimodelée de Ω est un sous-ensemble de Ω vérifiant la condition (S.V) et muni de la structure de variété bimodelée déterminée par la proposition 11.

Ω_1 est donc une variété bimodelée dans la catégorie $\boxed{+}_1$ formée des δ-couples Δ_1 provenant des δ-couples produits $\Delta_1 \times \Delta_2$ qui sont dans $\boxed{+}$, et de classe $\mathcal{C}^k$.

CHAPITRE I.

§3. LA STRUCTURE DE VARIETE BIMODELEE DE $\tilde{T}'\Omega$

n° 1. *Si Ω est une variété bimodelée, dans une catégorie $\dot{+}$ de δ-couples d'espaces de Banach, que l'on suppose de classe $\mathcal{C}^2$, les espaces cotangent et pseudo-cotangent ont des structures naturelles de variété de Banach de classe $\mathcal{C}^1$. On a en fait un résultat plus précis : l'espace pseudo-cotangent admet des structures de variétés bimodelées. Avant d'établir ce point, nous allons démontrer une formule.*

Soient U un ouvert de Ω, $c_\alpha = (U_\alpha, \varphi_\alpha, \Delta_\alpha)$, $c_\beta = (U_\beta, \varphi_\beta, \Delta_\beta)$ des δ-cartes de Ω, $\gamma = \gamma_{\beta\alpha} : \varphi_\alpha(U) \longrightarrow \varphi_\beta(U)$ avec $U = U_\alpha \cap U_\beta$, l'application de transition de c_α à c_β. γ est bidifférentiable de classe $\mathcal{C}^2$ et l'application de transition correspondante sur $\tilde{q}_\Omega^{-1}(U) (\subset \tilde{T}'\Omega)$ est

$$\Gamma = \Gamma_{\beta\alpha} : \varphi_\alpha(U) \times W'_\alpha \longrightarrow \varphi_\beta(U) \times W'_\beta : (x,w') \rightsquigarrow (\gamma(x), {}^t\gamma^o(x)^{-1} w')$$
$$= (\gamma(x), w' o \gamma^o(x)^{-1})$$

Dans ces conditions Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on a la formule :

$$(1) \qquad (j_\beta \times {}^t j_\beta) \circ \Gamma'(x_o, w'_o) = \Gamma^o(x_o, w'_o) \circ (j_\alpha \times {}^t j_\alpha)$$

avec $\Gamma^o(x_o, w'_o) \in \mathcal{L}(W_\alpha \times W'_\alpha, W_\beta \times W'_\beta)$ (*)

$$\Gamma^o(x_o, w'_o) = (\gamma^o(x_o) , v' \circ \gamma'(x_o)^{-1} - w'_o o \gamma^o(x_o)^{-1} o \gamma^{o'}(x_o)(\gamma'(x_o)^{-1} o)(w))$$

La formule (1) s'exprime aussi de la façon suivant si :

$$G = G_{\beta\alpha} : \tilde{q}_\Omega^{-1}(U) \longrightarrow \mathcal{L}(W_\alpha \times W'_\alpha, W_\beta \times W'_\beta) : w' \rightsquigarrow \Gamma'(x,w') = G_{\beta\alpha}(w')$$

où (x,w') est l'expression de w' dans c_α est une application de transition de $\mathcal{C}(\tilde{T}'\Omega)$ il existe

$$H = H_{\beta\alpha} : \tilde{q}_\Omega^{-1}(U) \longrightarrow \mathcal{L}(W_\alpha \times V'_\alpha, W_\beta \times V'_\beta) : w' \rightsquigarrow \Gamma^o(x,w') = H_{\beta\alpha}(w')$$

tel que

$$(2) \qquad (j_\beta \times {}^t j_\beta) \circ G_{\beta\alpha}(w') = H_{\beta\alpha}(w') \circ (j_\alpha \times {}^t j_\alpha)$$

(*) *Les topologies sur V'_1 et V'_2 seront examinées plus loin.*

La démonstration de (1) est une simple question de calcul :

$$= (\gamma'(x_o)v, w'o\gamma^o(x_o)^{-1} - w'_o o\gamma^o(x_o)^{-1} o\gamma^{o\prime}(x_o)(v)(\gamma^o(x_o)^{-1}.))$$

$$= (j_\beta\gamma'(x_o)v, w'o\gamma^o(x_o)^{-1} o j_\beta - w'_o o\gamma^o(x_o)^{-1} o\gamma^{o\prime}(x_o)(v)(\gamma^o(x_o)^{-1} o j_\beta.))$$

$$= (\gamma^o(x_o)j_\alpha v, w'oj_\alpha o\gamma'(x_o)^{-1} - w'_o o\gamma^o(x_o)^{-1} o\gamma^{o\prime}(x_o)(v)(j_\alpha o\gamma'(x_o)^{-1}.))$$

$$= (\gamma^o(x_o)j_\alpha v, {}^t j_\alpha w'o\gamma'(x_o)^{-1} - w'_o o\gamma^o(x_o)^{-1} o\gamma^{o\prime}(x_o)(\gamma'(x_o)^{-1}o)(j_\alpha v))$$

$$= \Gamma^o(x_o, w'_o)o(j_\alpha \times {}^t j_\alpha)$$

Considérons les triplets $(V\times W', W\times V', j\times {}^t j)$ où (V,W,j) décrit $\boxed{+}$, si V' est muni de la topologie de dual fort de V ces triplets ne déterminent pas en général des δ-couples stricts : le sous-espace vectoriel ${}^t jW'$ dense dans V'_S n'est pas obligatoirement dense dans V'_b. Par contre, tout sous-espace dense de V'_S est aussi dense dans V' muni d'une topologie compatible avec la dualité entre V et V' (*), on est ainsi conduit à raisonner sur des espaces V' munis de telles topologies :

Γ_1 (resp : Γ'_2) désigne la catégorie des espaces V (resp : W') formés à partir des δ-couples (V,W,j) de $\boxed{+}$ et l'on donne (cf. §1, n° 5).

(3) $\mathfrak{M}_1$ foncteur de Mackey défini sur Γ_1.

(4) $\mathfrak{M}_2$ foncteur de Mackey défini sur Γ'_2.

On suppose aussi :

(5) Si $g\in\mathcal{L}(V,W'_S)$: $g(\mathfrak{M}_1(V))\subset\mathfrak{M}_2(W')$.

On pose alors

(6) $\mathfrak{M}(W'\times V) = \{A'\times B$ où $A'\in\mathfrak{M}_2(W')$, $B\in\mathfrak{M}_1(V)\}$

$\mathfrak{M}(W'\times V)$ est un recouvrement de $W'\times V$ formé de parties convexes équilibrées et compactes pour la topologie $\sigma(W'\times V, W\times V')$; on a d'ailleurs la propriété suivante :

(7) $(W\times V')_{\mathfrak{M}} = W_{\mathfrak{M}_2} \times V'_{\mathfrak{M}_1}$

En effet, $W'\times V$ et $W\times V'$ sont mis en dualité par la forme bilinéaire.

(*) Ce n'est le cas de la topologie forte sur V' que si V est réflexif.

$((w',v),(w,v')) \rightsquigarrow \langle w',w\rangle + \langle v',v\rangle$ et l'on établit facilement que :

(8) $\frac{1}{2} A'^{o} \times B^{o} \subset (A'\times B)^{o} \subset A'^{o}\times B^{o}$ si $A'\times B \in \mathfrak{M}(W'\times V)$

(où le symbole ^{o} indique suivant les cas le polaire pour la dualité (V,V'), (W,W') ou $(W'\times V, W\times V')$). (7) découle de (8) et du fait que lorsque $A'\times B$ décrit $\mathfrak{M}(W'\times V)$ les termes extrêmes et le terme médiant de (8) décrivent respectivement un système fondamental de voisinages de l'origine dans $W_{\mathfrak{M}_2} \times V'_{\mathfrak{M}_1}$ et $(W\times V')_{\mathfrak{M}}$.

On vérifie aussi que si (V_1,W_1,j_1) et (V_2,W_2,j_2) sont des objets de $\dot{+}$.

(9)
- $f\in Mor(V_1,V_2) \Longrightarrow {}^{t}f\in \mathcal{L}(V'_{1\mathfrak{M}_1}, V'_{2\mathfrak{M}_1})$
- $g\in Mor(W_1,W_2) \Longrightarrow g\in \mathcal{L}(W_{1\mathfrak{M}_2}, W_{2\mathfrak{M}_2})$
- $h\in \mathcal{L}(W_1,V'_{2b}) \Longrightarrow h\in \mathcal{L}(W_{1\mathfrak{M}_2}, V'_{2\mathfrak{M}_1})$

Compte tenu de (3), (4), (5) ces propriétés s'établissent facilement par les procédés utilisés dans Bourbaki III, chap. IV, §4. La forme de (1) et les remarques qui précèdent suggèrent d'introduire :

(10) $\Pi_{\mathfrak{M}}$ = collection des δ-couples stricts d'e.l.c. $(V\times W',(W\times V')_{\mathfrak{M}},j\times {}^{t}j)$ où (V,W,j) est un objet de $\dot{+}$.

$\Pi_{\mathfrak{M}}$ devient une catégorie en définissant les morphismes de la façon suivante si : $\Delta_\alpha = (V_\alpha\times W'_\alpha, (W_\alpha\times V'_\alpha)_{\mathfrak{M}}, j_\alpha\times {}^{t}j_\alpha)$ sont dans $\Pi_{\mathfrak{M}}$ les morphismes de Δ_1 dans Δ_2 sont les couples
$(f,g)\in \mathcal{L}(V_1\times W'_1, V_2\times W'_2) \times \mathcal{L}(W_1\times V'_1)_{\mathfrak{M}}, (W_2\times V'_2)_{\mathfrak{M}})$ (cf. 9) avec

(11) $f(v,w') = (f_1(v), {}^{t}f_2(w') + h(v))\quad g(w,v') = (g_1(w), {}^{t}g_2(v') + k(w))$

(12) $go(j_1\times {}^{t}j_1) = (j_2\times {}^{t}j_2)of$ où

$f_1\in Mor(V_1,V_2)$, $f_2\in Mor(W_2,W_1)$, $h\in\mathcal{L}(V_1,W'_{2b})$

$g_1\in Mor(W_1,W_2)$, $g_2\in Mor(V_2,V_1)$, $k\in\mathcal{L}(W_1,V'_{2b})$

On vérifie que les couples (f,g) ayant les propriétés (11) et (12) possèdent les propriétés caractérisant les morphismes d'une catégorie :

$$(f^1,g^1)\ o\ (f^2,g^2) = (f^1\ o\ f^2,\ g^1\ o\ g^2)$$

Sur la catégorie $\Pi_{\mathcal{M}}$ on peut définir le foncteur b

$$b(W \times V')_{\mathcal{M}} = \text{ensemble des parties bornées de } W \times V'_{\mathcal{M}}$$
$$= \text{ensemble des parties bornées de } W \times V'_b$$

(un système fondamental de bornés dans un e.l.c. produit est formé "des produits de bornés" et les bornés de $W_{\mathcal{M}_2}$ sont les bornés de W puisque la $\mathcal{M}_2$-topologie est compatible avec la dualité (W,W'), les bornés de $W'_{\mathcal{M}_1}$ sont bornés dans V'_S donc dans V'_b puisque V est un espace de Banach). Dans ces conditions, les applications définies par (1)(ou (2)) sont de classe $\mathcal{C}_b$ et déterminent en chaque point $w'_o \in \mathring{T}'\Omega$ où elles sont définies un isomorphisme de la catégorie $\Pi_{\mathcal{M}}$, compte tenu de la définition d'une variété bimodelée, nous avons établi le

Théorème 1 :

Soit Ω une variété bimodelée dans une catégorie $\dot{+}$ de δ-couples d'espaces de Banach et de classe $\mathcal{C}^2$, $\mathring{T}'\Omega$ l'espace pseudo-cotangent à Ω, $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ un foncteur défini selon (3), (4), (5), (6).

Alors $\mathring{T}'\Omega$ peut être muni d'une structure de variété bimodelée dans la catégorie $\Pi_{\mathcal{M}}$ de δ-couples d'e.l.c. (définie par (10), (11), (12) et de classe $\mathcal{C}_b$.

Définition 1 :

La structure construite dans le théorème 1 est appelée $\mathcal{M}$-structure de variété bimodelée sur $\mathring{T}'\Omega$.

Cas particuliers : On peut, par exemple choisir $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ selon

(α_1) : $\mathcal{M}_1(V)$ = ensemble des enveloppes convexes équilibrées des parties finies de V (alors $V'_{\mathcal{M}_1} = V'_S$).

(α_2) : $\mathcal{M}_1(V)$ = ensemble des parties de V convexes équilibrées et compactes pour $\sigma(V,V')$ (alors $V'_{\mathcal{M}_1} = V'_\tau$: la $\mathcal{M}_1$-topologie est la topologie de Mackey).

(α_3) : Si les espaces de Banach "V" sont réflexifs : $\mathcal{M}_1(V)$ = ensemble des parties convexes équilibrées fermées bornées de V (alors $V'_{\mathcal{M}_1} = B'_b$)

(β_1) : $\mathfrak{M}_2(W')$ = ensemble des enveloppes convexes équilibrées des parties finies de W' (alors $W_{\mathfrak{M}_2} = W_\sigma$).

(β_2) : $\mathfrak{M}_2(W')$ = ensemble des parties convexes équilibrées fermées bornées de W' (alors $W_{\mathfrak{M}_2} = W_b$).

$\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ vérifie toujours (3) et (4). (5) a lieu dans les cas (α_1) et (β_1), (α_1) et (β_2), (α_2) et (β_2), (α_3) et (β_2). Enonçons les résultats trouvés.

Corollaire 1 :

Dans les conditions du théorème $\tilde{T}'\Omega$ peut être muni d'une structure de classe $\mathcal{C}_b$ de variété bimodelée.

- *Soit dans la catégorie $\Pi_{\sigma S}$ des $(V\times W'_b,\ W_\sigma \times V'_S,\ j\times {}^t j)$*
- *Soit dans la catégorie Π_{bS} des $(V\times W'_b,\ W\times V'_S,\ j\times {}^t j)$*
- *Soit dans la catégorie $\Pi_{b\tau}$ des $(V\times W'_b,\ W\times V',\ j\times {}^t j)$*

Corollaire 2 :

Dans les conditions du théorème, si de plus les espaces V de Γ_1 sont réflexifs $\tilde{T}'\Omega$ peut être muni d'une structure de variété bimodelée dans la catégorie Π_b des $(V\times W'_b,\ W\times V'_b,\ j\times {}^t j)$

Remarque :

Les conditions du corollaire 2 semblent être trop restreintes pour les applications et c'est pour cette raison qu'a été adoptée la présentation générale et quelque peu compliquée du théorème. Notons qu'à partir du moment où les espaces V ne sont pas réflexifs, le recours à des variétés bimodelées dans des δ-couples d'e.l.c. non normables semble être en général inévitable pour construire une structure de variété bimodelée sur $\tilde{T}'\Omega$. Le δ-fibré tangent à la structure de variété bimodelée du théorème 1 sera noté

$(\tau(\tilde{T}'\Omega),\ \tilde{\tau}_{\mathfrak{M}}(\tilde{T}'\Omega), J_{\mathfrak{M}})$ (et $(\tau, \tilde{\tau}_{\sigma s}, J_{\sigma s})$, $(\tau, \tilde{\tau}_{bs}, J_{bs})$, $(\tau, \tilde{\tau}_{b\tau}, J_{b\tau})$

dans les cas particuliers du corollaire 1). $(\tilde{T}'\Omega)$ représente la structure naturelle de fibré de Banach sur $(T\tilde{T}'\Omega,\ \tilde{T}'\Omega,\ p_{\tilde{T}'\Omega})$, $\tilde{\tau}_{\mathfrak{M}}(\tilde{T}'\Omega)$ une structure de fibré vectoriel sur $(\tilde{T}\tilde{T}'\Omega,\ \tilde{T}'\Omega,\ \tilde{p}_{T'\Omega})$.

De plus, que les espaces V de Γ_1 soient ou non réflexifs, les applications définies en (1) ou (2) déterminent un couple de cocycles qui vérifie les conditions de la proposition 1 du §1 lorsque tous les espaces

W de Γ_2 et V' de Γ_1' sont munis de leurs topologies fortes (d'espaces de Banach), ce couple de cocycles détermine un δ-fibré vectoriel $(\tau(\tilde{T}'\Omega), \tilde{\tau}_b(\tilde{T}'\Omega), J_b)$ à fibres dans la catégorie Π_b des $(V\times W_b', W\times V_b', j\times {}^t j)$ dont les morphismes sont définis selon le procédé (10), (11).

- *$(\tau(\tilde{T}'\Omega), \tilde{\tau}_b(\tilde{T}'\Omega), J_b)$ est strict et représente le δ-fibré vectoriel tangent à la structure de variété bimodelée du corollaire 2 si Γ_1 est formée d'espaces réflexifs.*
- *$(\tau(\tilde{T}'\Omega), \tilde{\tau}_b(\tilde{T}'\Omega), J_b)$ est non strict et ne représente pas un δ-fibré vectoriel tangent à une variété bimodelée lorsque Γ_1 n'est pas formée d'espaces réflexifs.*

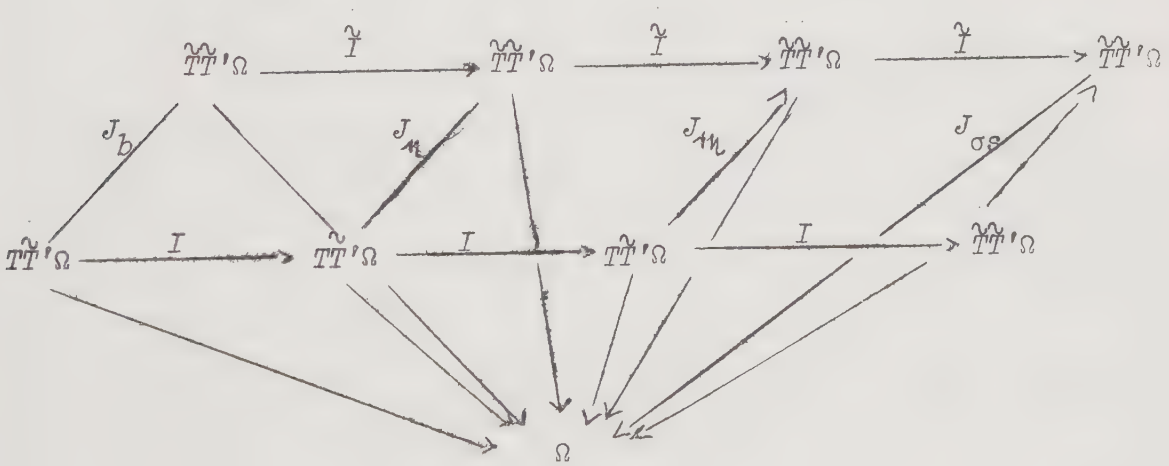
Remarques :

1) Inclusions naturelles des δ-fibrés tangents aux $\mathcal{M}$-structures sur T' .

Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux foncteurs définis selon (3), (4), (5), (6) avec

$$\mathcal{M}(W'\times V) \subset \mathcal{N}(W'\times V) \quad \text{pour} \quad (V,W,j) \quad \text{dans} \quad \boxplus$$

de sorte que $(W\times V')_{\mathcal{N}}$ est plus fin que $(W\times V')_{\mathcal{M}}$. Alors l'application $(I,\tilde{I})$ où I (resp : $\tilde{I}$) est l'identité de $\tilde{T}\tilde{T}'\Omega$ (resp : $\tilde{\tilde{T}}\tilde{\tilde{T}}'\Omega$) et, d'une manière générale, on a la diagramme commutatif :



Dans ce diagramme figurent de gauche à droite les structures de δ-fibrés $(\tau,\tilde{\tau}_b,J_b)$, $(\tau,\tilde{\tau}_{\mathcal{N}},J_{\mathcal{N}})$, $(\tau,\tilde{\tau}_{\mathcal{M}\mathcal{N}},J_{\mathcal{M}\mathcal{N}})$, $(\tau,\tau_{\sigma s},J_{\sigma s})$.

2) Si $c = (U,\varphi,\Delta)$ est une δ-carte de Ω l'expression locale de J est

$$J_{\mathcal{M}c} : ((x,w'),(v_1,w_1')) \rightsquigarrow ((x,w'),(jv_1,{}^t jw_1')) \quad (c)$$

Proposition 1 :

Soit Ω une variété bimodelée, on suppose que $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ avec (cas β_2 ci-dessus) $\mathcal{M}_2(W')$ = ensemble des parties convexes équilibrées, fermées, bornées de W'. Dans ces conditions, la projection $\tilde{q}_\Omega : \tilde{T}'\Omega \longrightarrow \Omega$ est bidifférentiable et de classe $\mathcal{C}_b$ pour la $\mathcal{M}$-structure de variété bimodelée sur $\tilde{T}'\Omega$.

Démonstration :

Si l'on raisonne dans une δ-carte $c = (U, \varphi, \Delta)$ de Ω :

$$\tilde{q}_\Omega : (x,w') \rightsquigarrow x, \qquad T\tilde{q}_\Omega : ((x,w'),(v_1,w_1')) \rightsquigarrow (x,v_1) \qquad (c)$$

$$J_{\mathcal{M}} \circ T\tilde{q}_\Omega : ((x,w'),(v_1,w_1')) \rightsquigarrow (x,jv_1) \qquad (c)$$

S'il existe une application $T\tilde{T}\tilde{q}_\Omega : \tilde{T}\tilde{T}'\Omega \longrightarrow \tilde{T}'\Omega$ qui est un morphisme de $\tilde{\tau}_{\mathcal{M}}(\tilde{T}'\Omega)$ dans $\tilde{\tau}(\Omega)$ et vérifie $T\tilde{T}\tilde{q}_\Omega \circ J_{\mathcal{M}} = J \circ T\tilde{q}_\Omega$ nécessairement

$$T\tilde{T}\tilde{q}_\Omega : ((x,w'),(w_1,v_1')) \rightsquigarrow (x,w_1) \qquad (c)$$

La partie principale de cette application soit $(W\times V')_{\mathcal{M}} \longrightarrow W : (w_1,v_1') \rightsquigarrow w_1$ est de classe $\mathcal{C}_b$ et l'existence de $T\tilde{T}\tilde{q}_\Omega$ découle de l'équivalence (a) $\Longleftrightarrow$ (b) du §2, n° 4.

n° 2. Les formes et pseudo-formes canoniques de Liouville.

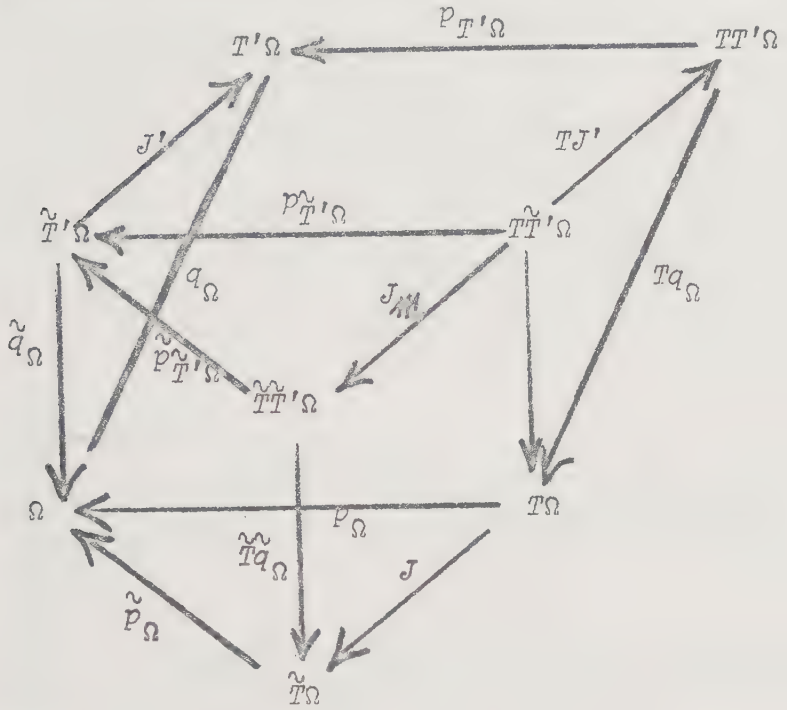
Les fibrés duals des fibrés de Banach $\tau(\tilde{T}'\Omega)$ et $\tilde{\tau}_b(\tilde{T}'\Omega)$ se construisent classiquement. Le fibré dual $(\tilde{\tau}_{\mathcal{M}})'(\tilde{T}'\Omega)$ dual de $\tilde{\tau}_{\mathcal{M}}(\tilde{T}'\Omega)$ se construit par la théorie du §1, n° 4 ; c'est un fibré vectoriel de classe $\mathcal{M}_{\mathcal{M}}$ à fibres dans la catégorie Π' formée des $W_b' \times V_b$ dont les morphismes sont formés par transposition des morphismes de $\Pi_{\mathcal{M}}$. En effet :

(1) Le dual de $(W\times V')_{\mathcal{M}}$ s'identifie à $W'\times V$ avec la forme bilinéaire canonique $\langle w',w\rangle + \langle v',v\rangle$

(2) Un système fondamental de parties équicontinues de $W'\times V$ dual de $(W\times V')_{\mathcal{M}}$ est formé des $A'\times B$ où $B \in \mathcal{M}_1(V)$, $A' \in \mathcal{M}_2(W')$.

(1) est évident et (2) résulte du fait qu'un système fondamental de voisinages de 0 dans $(W\times V')_{\mathcal{M}}$ est formé des $(A'\times B)^\circ$ où $B \in \mathcal{M}_1(V)$, $A' \in \mathcal{M}_2(W')$, un système fondamental de parties équicontinues de $W'\times V$ dual de $(W\times V')$ s'obtient donc en prenant les polaires $(A'\times B)^{\circ\circ} = A'\times B$ d'après le théorème des bipolaires.

us allons maintenant généraliser la construction classique de la rme de Liouville sur un espace cotangent ; les résultats du n° 1 rmettent de construire le diagramme commutatif suivant :



roposition 2 :

1°) Les applications :

$$\ell_o : TT'\Omega \longrightarrow \mathbb{K} : u \rightsquigarrow < p_{T'\Omega}\, u,\ Tq_\Omega\, u >$$

$$\ell_1 : \tilde{T}\tilde{T}'\Omega \longrightarrow \mathbb{K} : u \rightsquigarrow < \tilde{p}_{\tilde{T}'\Omega}\, u,\ \tilde{T}\tilde{q}_\Omega\, u >$$

éfinissent respectivement une forme différentielle canonique sur $T'\Omega$ t une pseudo-forme différentielle canonique sur $T'\Omega$ (section continue e $(\tilde{\tau})'_{\mathcal{M}}(T'\Omega)$).

2°) $\ell_o \circ TJ' = \ell_1 \circ J_{\mathcal{M}}$ définit une forme différentielle canonique sur $'\Omega$.

émonstration :

La démonstration des propriétés des formes et pseudo-formes ifférentielles est immédiate. De plus, en utilisant le diagramme i-dessus

1) $$\ell_o(TJ'u) = < p_{T'\Omega} \circ TJ'u,\ Tq_\Omega \circ TJ'u > = < J' \circ p_{\tilde{T}'\Omega} u,\ \tilde{T}\tilde{q}_\Omega u >$$

2) $$\ell_1(J_{\mathcal{M}} v) = < \tilde{p}_{\tilde{T}'\Omega} \circ J_{\mathcal{M}} u,\ \tilde{T}\tilde{q}_\Omega \circ J_{\mathcal{M}} u > = < p_{\tilde{T}'\Omega} u,\ J \circ \tilde{T}\tilde{q}_\Omega u >$$

L'égalité de (1) et (2) résulte de l'identité :

$$< J'w', v > = < w', Jv > \quad si \quad v \in T\Omega, \quad w' \in \tilde{T}'\Omega, \; p_\Omega v = \tilde{q}_\Omega w'$$

Expressions locales :

Dans une δ-carte (c) de Ω :

$$\ell_o : ((x,v'), (v_1,v_1')) \rightsquigarrow < v', v_1 > \qquad (c)$$

$$\ell_o : ((x,w'), (w_1,v_1')) \rightsquigarrow < w', w_1 > \qquad (c)$$

$$\ell : ((x,w'), (v_1,w_1')) \rightsquigarrow < w', jv_1 > = < {}^t j w', v_1 > \qquad (c)$$

Théorème 2 :

Soit Ω une variété bimodelée dans une catégorie $\mathcal{E}$, de classe $\mathcal{C}^2$, $\mathcal{M}$ un couple de foncteurs définis comme en (3), (4), (5), (6).

(a) Il existe une section canonique S unique du fibré $\mathcal{L}(\tilde{\tau}_b(\tilde{T}'\Omega), \tau_b(\tilde{T}'\Omega) ; \mathbb{R})$ telle que :

$$d\ell(u_1,u_2) = S(J_{\mathcal{M}} u_1, u_2) \quad (\ell = \text{forme de Liouville sur } \tilde{T}'\Omega)$$

(b) Si dans une δ-carte (c) de Ω :

$$v = ((x,w_o'),(w,v')), \quad u = ((x,w_o'), (v,w')), \quad . ' = (x,w_o')$$

$$S(v,u) = < v', v > - < w', w >$$

Théorème 3 :

Dans les conditions du théorème 2, si l'on suppose que les espaces W des δ-couples (V,W,j) de $\mathcal{E}$ sont réflexifs, alors :

L'application $S_b : v \longrightarrow S(\ ,.)$ qui applique la fibre $\tilde{T}_{w'}(\tilde{T}'\Omega)$ dans la fibre $T'_{w'}(\tilde{T}'\Omega)$ détermine un isomorphisme du fibré $\tilde{\tau}_{\mathcal{M}}(\tilde{T}'\Omega)$ sur $\tau'_{\mathcal{M}}(\tilde{T}'\Omega)$ et un isomorphisme du fibré $\tilde{\tau}_b(\tilde{T}'\Omega)$ sur $\tau'_b(\tilde{T}'\Omega)$.

Démonstration :

Soit (c) une δ-carte de Ω si $u, u_1 \in T(\tilde{T}'\Omega)$, $\in \tilde{T}\tilde{T}'\Omega$ et $u = ((x,w_o'), (v,w'))$, $u_1 = ((x,w_o'), (v_1,w_1'))$, $v = ((x,w_o'),(v,w'))$ (c)

$$(1) \quad d\ell(u_1,u) = < w_1', jv > - < w', jv_1 > = < {}^t j w_1', v > - < w', jv_1 > \qquad (c)$$

Si S existe on doit donc nécessairement avoir, d'après l'expression $J_{\mathcal{M}}$:

(2) $S(v,u) = \langle v', v \rangle - \langle w', w \rangle$ si $w \in jV$, $v' \ {}^t jW'$ $(v \in J_{\mathcal{M}} T\hat{T}'\Omega)$ (c)

Or, si u est fixé, l'application

$$W_{\mathcal{M}_2} \times V'_{\mathcal{M}_1} \longrightarrow \mathbb{R} : (w,v') \rightsquigarrow \langle v', v \rangle - \langle w', w \rangle$$

est continue, comme $jV \times {}^t jW'$ est dense dans $W_{\mathcal{M}_2} \times V'_{\mathcal{M}_1}$, d'après le principe de prolongement des identités si S existe alors nécessairement :

(3) $S(v,u) = \langle v', v \rangle - \langle w', w \rangle$ si $v \in \tilde{T}\tilde{T}'\Omega$, $u \in T\hat{T}'\Omega$

Le (a) et (b) seront démontrés si l'on prouve que le second membre de (3) détermine pour chaque δ-carte c la valeur d'une section S de $\mathcal{L}(\tilde{\tau}(\tilde{T}'\Omega), \tau(\hat{T}'\Omega) ; \mathbb{R})$ c'est-à-dire que si c et $\bar{c}$ sont deux δ-cartes de Ω dans lesquelles :

$$\left| \begin{array}{ll} v = ((x,w'_o), (w,v')), & u = ((x,w'_o), (v,w')) \quad (c) \\ v = ((\bar{x},\bar{w}'_o), (\bar{w},\bar{v}')), & u = ((\bar{x},\bar{w}'_o), (\bar{v},\bar{w}')) \quad (\bar{c}) \end{array} \right.$$

(4) $\langle v', v \rangle - \langle w', w \rangle = \langle \bar{v}', \bar{v} \rangle - \langle \bar{w}', \bar{w} \rangle$ est vérifiée.

Or si γ désigne l'application de transition de c à $\bar{c}$:

$$\begin{aligned} \langle \bar{v}', \bar{v} \rangle &= (v' o \gamma'(x)^{-1} - w_o o \gamma^o(x)^{-1} o \gamma^{o\prime}(x)(\gamma'(x)^{-1}.)(w))(\gamma'(x)v) \\ &= \langle v', v \rangle - w'_o \circ \gamma^o(x)^{-1} \circ \gamma^{o\prime}(x)(v,w) \\ \langle \bar{w}', \bar{w} \rangle &= (w' o \gamma^o(x)^{-1} - w'_o o \gamma^o(x)^{-1} o \gamma^{o\prime}(x)(v)(\gamma^o(x)^{-1} o))(\gamma^o(x)w) \\ &= \langle w', w \rangle - w'_o \circ \gamma^o(x)^{-1} \circ \gamma^{o\prime}(x)(v,w) \end{aligned}$$

On en déduit (4) d'où (a) et (b). Le théorème 3 résulte de l'expression locale de S_b

$$S_b : ((x,w'_o), (w,v')) \rightsquigarrow (((x,w'_o),(v,w')) \rightsquigarrow \langle v', v \rangle - \langle w', w \rangle)$$

et du fait que l'application $(w,v') \rightsquigarrow ((v,w') \rightsquigarrow \langle v', v \rangle - \langle w', w \rangle)$, est composée de l'isomorphisme $(w,v') \rightsquigarrow (-w,v')$ de $W \times V'$ sur lui-même et de l'application $(w,v') \rightsquigarrow ((v,w') \rightsquigarrow \langle v', v \rangle + \langle w', w \rangle)$, application qui est un isomorphisme de $W \times V'$ sur $(W' \times V)'$ d'après la réflexivité de W et un résultat classique sur la forme du dual d'un produit.

Remarque :

Le théorème 2 est une généralisation aux variétés bimodelées d'un résultat classique : l'espace cotangent à une variété de Banach

dont le modèle est réflexif admet une structure symplectique canonique.

Le théorème donné ci-dessus se réfère à une variété sous-jacente à une variété bimodelée mais dont le modèle (espace "V") n'est pas réflexif, il suffit que l'espace "W" seul le soit, autrement dit que Γ_2 *soit formée d'espaces réflexifs.*

Corollaire :

Dans les conditions du théorème 3 l'application $S_b : \tilde{T}(\tilde{T}'\Omega) \longrightarrow T'(\tilde{T}'\Omega)$ *détermine un isomorphisme de* $\tilde{\tau}_{bs}(\tilde{T}'\Omega)$ *sur* $\tau'_{bs}(\tilde{T}'\Omega)$.

C'est sous la forme de ce corollaire que le résultat trouvé semble être le plus directement utilisable dans les applications.

n° 3. Structure pseudo-symplectique sur une variété bimodelée.

Les résultats du n° 2 suggèrent de poser, sous une forme appropriée, une extension aux variétés bimodelées de la définition d'une structure symplectique ; voici une possibilité.

$\boxed{+}$ *désigne une catégorie de* δ*-couples d'e.l.c.,*
$G = (G_1, G_2)$ *un foncteur sur* $\boxed{+}$ *comme dans le §2, n° 1.*

$\mathcal{M}$ *un foncteur de Mackey sur* Γ'_2.

$\mathcal{N}$ *un foncteur de Mackey sur* Γ_1.

Définition 2 :

Soit Ω *une variété bimodelée dans* $\boxed{+}$ *et de classe* $\mathcal{C}^1_G$, *une structure pseudo-symplectique sur* Ω *est déterminée par la donnée d'une 2-forme* S_o *sur la variété de Banach sous-jacente à* Ω *telle que :*

1°) $d S_o = 0$.

2°) Il existe une section S *du fibré* $\mathcal{L}(\tilde{\tau}(\Omega), \tau(\Omega); \mathbb{R})$ *telle que*

(α) $S_o(X_1, X_2) = S(JX_1, X_2)$ *(J = injection du* δ*-fibré tangent à* Ω*).*

(β) $S_b : Y \rightsquigarrow S_b(Y, .)$ *est un isomorphisme de* $\tilde{\tau}_{\mathcal{M}}(\Omega)$ *sur* $\tau'_{\mathcal{N}}(\Omega)$.

On peut alors définir des champs hamiltoniens sur une variété bimodelée.

Définition 3 :

Un champ de pseudo-vecteurs Y sur Ω (section continue de $\tilde{\tau}(\Omega)$) est dit hamiltonien si $S(Y,.)$ est une 1-forme fermée sur la variété Ω.

. Si $H : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable, il existe un champ hamiltonien unique Y_H tel que

$$S(Y,.) = - d H \qquad (1)$$

H est alors appelé hamiltonien de Y_H et Y_H le système dynamique hamiltonien associé à H. Si la condition (1) du §2, n° 3 à lieu (définition 6, §2) les intégrales du système dynamique hamiltonien Y sont les applications pseudo-différentiables $\varphi : I \longrightarrow \Omega$ (I = intervalle de $\mathbb{R}$) telles que

$$\tilde{T}\varphi = Y \circ \varphi \quad \text{sur } I \qquad (2)$$

On peut donc réénoncer le théorème 3 sous la forme

Théorème 3 (seconde forme) :

Soit $\boxed{+}$ une catégorie de δ-couples d'espaces de Banach telle que Γ_2 soit formée d'espaces réflexifs. Si Ω est une variété bimodelée dans $\boxed{+}$ et de classe $\mathcal{C}^2$, alors $S_o = d\lambda$ où λ est la forme de Liouville sur $\tilde{T}'\Omega$ définit pour chaque $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2)$ une structure pseudo-symplectique sur l'espace pseudo-cotangent $\tilde{T}'\Omega$.

Equations locales des courbes intégrales de $Y = Y_H$ dans les conditions du théorème 3.

Soient $H = \tilde{T}'\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ un hamiltonien.

$Y : \tilde{T}'\Omega \longrightarrow \tilde{T}\tilde{T}'\Omega$ le système dynamique associé à H.

Si $c = (U,\varphi,\Delta)$, $\Delta = (V,W,j)$ et

$$H_c : (x,w') \rightsquigarrow H_c(x,w'), \quad Y_c : (x,w') \rightsquigarrow ((x,w'),(u(x,w'),v'(x,w')))$$

sont les expressions de H et Y dans (c) la relation $S(Y,.) = - dH$ se traduit par

$$\forall v_1 \in V, \forall w'_1 \in W' : \langle v'(x,w'), v_1 \rangle - \langle w'_1, u(x,w') \rangle = -\partial_V H_c(x,w') v_1 - \partial_{W'} H_c(x,w') w'_1$$

d'où $v'(x,w') = -\partial_V H_c(x,w')$, $u(x,w') = i\,\partial_{W'} H_c(x,w')\ i:W'' \longrightarrow W$ étant l'isomorphisme naturel du bidual de l'espace réflexif W sur W. L'expression locale de Y est donc :

$$Y_c : (x,w') \rightsquigarrow ((x,w'), (i\partial_{W'} H_c(x,w'), -\partial_V H_c(x,w')))$$

et les intégrales de Y sont déterminées dans la δ-carte c par les applications de I dans $V\,W'$, pseudo-différentiables (*)
$t \rightsquigarrow (q(t), p(t))$ telles que

$$\left\| \begin{array}{l} \dot{p}(t) \equiv \dfrac{d}{dt}\,{}^t j p(t) = -\partial_V H_c(q(t), p(t)) \\ \dot{q}(t) \equiv \dfrac{d}{dt}\, j\, q(t) = i\,\partial_{W'} H_c(q(t), p(t)) \end{array} \right.$$

Ces équations généralisent les "quations de Hamilton" qui déterminent les intégrales des systèmes dynamiques sur les espaces cotangents aux variétés de Banach de modèle réfléxif.

Remarquons que la dérivée q est prise avec la topologie de $W_{\mathcal{M}_2}$ et le dérivée p est prise avec la topologie de $V'_{\mathcal{M}_1}$. En pratique $W_{\mathcal{M}_2}$ sera l'espace de Banach W lui-même et $V'_{\mathcal{M}_1}$ sera le dual faible V'_s de V.

(*) Pour le δ-couple $(V\times W', W\times V', j\times {}^t j)$.

CHAPITRE I.

§4. APPLICATIONS DES VARIETES BIMODELEES EN DYNAMIQUE ANALYTIQUE DES MILIEUX CONTINUS.

Pour un milieu continu soumis à certaines liaisons et dont l'espace des configurations est une variété bimodelée Ω, il est d'abord précisé ce que l'on entend, dans ces conditions, par puissance des quantités d'accélération et principe des puissances virtuelles. Plus exactement, on expose le principe des puissances virtuelles sous une forme abstraite qui paraît susceptible de décrire des cas assez généraux de milieux continus et l'on montre que, sous des hypothèses de régularité très faibles sur le mouvement considéré, ce principe se traduit localement par une équation qui généralise l'équation classique de Lagrange.

Au n° 2, on étudie une généralisation de la transformation de Legendre qui est un morphisme d'espaces fibrés appliquant l'espace pseudo-tangent $\tilde{T}\Omega$ dans l'espace pseudo-cotangent $\tilde{T}'\Omega$ et l'on montre que l'interprétation géométrique intrinsèque de l'équation de Lagrange généralisée s'effectue de façon naturelle avec la structure pseudo-symplectique canonique de $\tilde{T}'\Omega$ (généralisation des équations de Hamilton). Par contre, cette interprétation intrinsèque ne s'effectue pas naturellement par extension de la notion de structure Lagrangienne, extension qui paraît réclamer un surcroît d'hypothèse peu admissible quant à Ω et la régularité du mouvement considéré. Du point de vue géométrique, les résultats trouvés étendent à des milieux continus soumis à des liaisons, avec des modifications convenables, certaines propriétés des systèmes mécaniques à un nombre fini de degré de liberté exposées dans GODBILLON I ou ABRAHAM I. On voit aussi que l'introduction des variétés bimodelées dans ces questions conduit à une description plus fine que celle donnée par MARSDEN.

n° 1. Principe des puissances virtuelles. Equations de Lagrange sur une variété bimodelée.

Soient Ω une variété bimodelée de classe $\mathcal{C}^2$, $\mathcal{M}$ un espace de Banach sur $\mathbb{R}$. $\zeta : \tilde{T}\Omega \longrightarrow \mathcal{M}$ une application tels que :

(1) $\mathcal{M}_\mathcal{O}$ est muni d'une forme bilinéaire symétrique continue θ.

(2) ζ est différentiable et linéaire continue sur chaque fibre de $\tilde{\tau}(\Omega)$.

. $\zeta \circ J : T\Omega \longrightarrow \mathcal{M}_\mathcal{O}$ est bidifférentiable et de classe $\mathcal{C}^1$ comme application de la variété bimodelée $T\Omega$ dans la variété bimodelée triviale $\mathcal{M}_\mathcal{O}$ (*)

. $(\zeta \circ J)^\circ (\tilde{s} u) = \zeta'(u)$ pour $u \in T\tilde{T}\Omega$.

($\tilde{s}$ est l'isomorphisme canonique de $\tau(\tilde{T}\Omega)$ sur $\tilde{\tau}(\tau\Omega)$. cf. §2, n° 7).

Le plus souvent $\mathcal{M}_\mathcal{O}$ sera un espace hilbertien sur $\mathbb{R}$ et θ le produit scalaire dans $\mathcal{M}_\mathcal{O}$.

Remarques :

1°) Soit $c = (U, \varphi, \Delta)$ une δ-carte de Ω, si $\zeta_c : U \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'expression de ζ dans cette δ-carte, (2) exprime que :

. ζ_c est différentiable et $\zeta_c(x, .) \in \mathcal{L}(W, \mathcal{M})$ pour $x \in U$.

. $\zeta_c \circ (id \times j) : U \times V \longrightarrow \mathcal{M}_\mathcal{O}$ est bidifférentiable et de classe $\mathcal{C}^1$.

. $\tilde{\partial}_1(\zeta_c \circ (id \times j))\,(x, v)w = \partial_1 \zeta_c(x, w)v$.

(où $\tilde{\partial}_1$ est la pseudo-différentielle partielle par rapport à la 1ère variable x).

2°) La condition (2) a lieu en particulier si $\zeta = p_2 \tilde{T} f$ où $f : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_\mathcal{O}$ est bidifférentiable et de classe $\mathcal{C}^2$ (proposition 5 du §2).

Le mouvement étudié est défini par une application $M : I \longrightarrow \Omega$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$) et l'on suppose qu'il vérifie les conditions suivantes :

(3) M est faiblement pseudo-différentiable.

(4) $\zeta \tilde{T} M : I \longrightarrow \mathcal{M}_\mathcal{O}$ est faiblement dérivable au sens suivant :

pour $t \in I$ il existe $\Gamma(t) \in T'_{M(t)}\Omega$ tel que

$$\forall\, v \in T_{M(t)}\Omega : \frac{d}{dt}\,\theta(\zeta \tilde{T} M,\ \zeta J v)(t) = \langle \Gamma(t), v \rangle$$

(*) C'est-à-dire qu'un δ-atlas de $\mathcal{M}_\mathcal{O}$ est formé de la seule δ-carte $(\mathcal{M}_\mathcal{O}, id, \Delta = (\mathcal{M}_\mathcal{O}, \mathcal{M}_\mathcal{O}, id))$!

Autrement dit, si $\theta_d \in \mathcal{L}(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ *est l'application linéaire droite associée à la forme bilinéaire* θ *l'application*

$s \rightsquigarrow \theta_d(\zeta \tilde{T}M(s)) o \zeta o J_{M(t)}$ *admet pour dérivée au point dans* $T'_{M(t)}\Omega$ *faible la forme linéaire continue* $\Gamma(t)$.

(5) $\forall t \in I$ *les quotients* $\frac{1}{h}(\zeta \tilde{T}M(t+h) - \zeta \tilde{T}M(t))$ *restent dans un ensemble borné de* $\mathcal{M}$ *pour* $h \neq 0$ *et assez petit.*

Définition 1 :

La forme $\Gamma(t) \in T'_{M(t)}\Omega$ *est appelée puissance virtuelle des quantités d'accélération du mouvement* M *dans la configuration* $M(t)$.

On peut remarquer qu'il n'a pas été supposé que "$\Gamma(t) \in \mathcal{M}'$*" ; en fait, si les formes* $\frac{1}{h}\{\theta_d(\zeta \tilde{T}M(t+h) - \zeta \tilde{T}M(t))\}$ *convergent simplement sur* $\zeta o J(T_{M(t)}\Omega)$ *- sous-espace qui, au mieux, est dense dans* $\mathcal{M}$ *- lorsque* $h \longrightarrow 0$, *on ne peut affirmer que leur limite est dans* $\mathcal{M}'$, *par contre la convergence simple sur* $T_{M(t)}\Omega$ *des formes* $\frac{1}{h}\{\theta_d(\zeta \tilde{T}M(t+h) - \zeta \tilde{T}M(t)) o \zeta o J\}$ *a lieu et la limite est dans* $T'_{M(t)}\Omega$.

Dans le cas trivial d'un point matériel de masse m *évoluant dans l'espace euclidien usuel* $\mathcal{E}$: $\theta = m <.\,,.>$ *et* $\Gamma(t) = \frac{d}{dt} < m \frac{d\vec{x}}{dt} | . > \in \mathcal{C}'$. *Un exemple typique d'espace* $\mathcal{M}$ *et d'application* ζ *pour un milieu continu soumis à des liaisons sera traité en détail au chapitre IV.*

Expression Lagrangienne de la puissance des quantités d'accélération.

Si l'on introduit la fonction "énergie cinétique"

(6) $\mathbb{K} : \tilde{T}\Omega \longrightarrow \mathbb{R} : w \rightsquigarrow \frac{1}{2}\theta(\zeta w, \zeta w)$

dont l'expression locale dans une δ*-carte* $c = (U, \varphi, \Delta)$ *de* Ω *est*

$$\mathbb{K}_c : \varphi(U) \times W \longrightarrow \mathbb{R} : (x,w) \rightsquigarrow \frac{1}{2}\theta(\zeta_c(x,w), \zeta_c(x,w)) = \mathbb{K}_c(x,w)$$

et l'expression locale du mouvement (définie si $t \in M^{-1}(U)$)

$$q(t) = \varphi o M(t)$$

et si l'on pose

$$\dot{q}(t) = \frac{d}{dt} jq(t) \qquad \text{(dérivée dans } W_\sigma)$$

on a la proposition suivante:

Proposition 1 :

Dans les hypothèses (1), (2), (3), (4), (5), sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $M(t)\in U$ on a :

$$\langle \Gamma(t), v\rangle = \left(\frac{d}{dt}(\partial_2 \mathbb{K}_c(q,q)\circ j) - \partial_1 \mathbb{K}_c(q,q)\right)(v)$$

où la dérivée $\frac{d}{dt}$ est prise dans V'_s, $v\in T_{M(t)}\Omega$, $v = p_2\, T\varphi(v)$, $q \equiv q(t)$ $\dot q \equiv \dot q(t)$.

Démonstration :

On a

$$\partial_1 \mathbb{K}_c(q,\dot q)(v) = \theta(\zeta_c(q,\dot q),\ \partial_1 \zeta_c(q,\dot q)(v))$$

$$\partial_2 \mathbb{K}_c(q,\dot q)(jv) = \theta(\zeta_c(q,\dot q),\ \zeta_c(q,jv))$$

Calculons $\frac{d}{dt}\partial_2 K_c(q(t),\dot q(t))(jv)$; pour $h>0$ on a

$$\tfrac{1}{2}\big(\theta(\zeta_c(q(t+h),\dot q(t+h)),\ \zeta_c(q(t+h),jv)) - \theta(\zeta_c(q(t),\dot q(t)),\ \zeta_c(q(t),jv))\big)$$

$$= \theta\left(\tfrac{1}{h}(\zeta\tilde{I}M(t+h) - \zeta\tilde{I}M(t)),\ \zeta J_\cdot\right)$$

$$+ \theta\left(\tfrac{1}{h}(\zeta_c(q(t+h),\dot q(t+h)) - \zeta_c(q(t),\dot q(t))),\ \zeta_c(q(t+h),jv) - \zeta_c(q(t),jv)\right)$$

$$+ \theta\left(\zeta_c(q(t),q(t)),\ \tfrac{1}{h}(\zeta_c(q(t+h),jv) - \zeta_c(q(t),jv))\right)$$

Lorsque h tend vers 0 le premier terme tend vers $\langle \Gamma(t), v\rangle$ par définition (cf.(4)), le second terme tend vers 0 compte tenu de (5) et de la continuité de q. De plus

$$\tfrac{1}{h}(\zeta_c(q(t+h),jv) - \zeta_c(q(t),jv)) \quad \text{tend vers}$$

$\tilde\partial_1(\zeta_c\circ(id\times j)(q(t),v)(\dot q(t)) = \partial_1 \zeta_c(q(t),\dot q(t))(v)$ *dans $\mathcal{N}_\sigma$ d'après la proposition 1 du §2 avec $\Delta_1 = (V, W_\sigma, j)$, $\Delta_2 = (\mathcal{N}, \mathcal{N}_\sigma, id)$, $f = q$, $g(x) = \zeta_c(x,jv)$ et les hypothèses (2) et (3). On en déduit que*

$$\frac{d}{dt}\partial_2 \mathbb{K}_c(q,\dot q)\circ j(v) = \langle \Gamma(t), v\rangle + \theta(\zeta_c(q,\dot q),\ \partial_1 \zeta_c(q,\dot q)(v))$$

et la proposition en découle.

Le principe des puissances virtuelles et les équations de la Dynamique.

Ω, variété bimodelée de classe $\mathcal{C}^2$, est l'espace des configurations d'un milieu continu et l'on utilise les notations du §2, n° 7.

Définition 2 :

Soit $W \in \tilde{T}\Omega$, *on appelle vitesse virtuelle dans l'état* W *tout élément* $U \in \tilde{T}\Omega \times_{\Omega} T\Omega$ *tel que* $\overline{\pi}_1 U = W$.

. W *étant fixé* U *est totalement déterminé par la donnée de* $u^* = \pi_2 U \in T\Omega$. *Dans ces conditions* $\tilde{p}_{\Omega} W = p_{\Omega} U^*$.

(En pratique U *représentera un "champ de vitesse", Cf. exemples des chapitres III et IV).*

La puissance virtuelle des forces appliquées(*) *au milieu continu est déterminée par une forme semi-basique de première espèce sur* $\tilde{T}\Omega$ *ou, ce qui revient au même, par une section* Q *du fibré* $\tilde{p}_{\Omega}^* \tau'(\Omega)$ *identifié au dual de* $\tilde{p}_{\Omega}^* \tau(\Omega)$. *Si* U *est une vitesse virtuelle dans l'état* $W \in \tilde{T}\Omega$:

$$\mathcal{P} \equiv \langle Q(W), U \rangle = \langle \overline{\chi}_2 Q(W), U^* \rangle$$

Principe des puissances virtuelles :

Le mouvement $t \rightsquigarrow M(t)$ *doit satisfaire à la condition suivante : à chaque instant* t *la puissance virtuelle des quantités d'accélération est égale à la puissance virtuelle des forces appliquées*(*)

(7) $\forall U \in \tilde{T}\Omega \times_{\Omega} T\Omega$ *avec* $\overline{\pi}_1 U = \tilde{T}M(t)$: $\langle \Gamma(t), \overline{\pi}_2 U \rangle = \langle Q(\tilde{T}M(t)), U \rangle$

où bien, ce qui est équivalent :

(8) $\forall U^* \in T\Omega$ *avec* $p_{\Omega} U^* = M(t)$: $\langle \Gamma(t), U^* \rangle = \langle \overline{\chi}_2 Q(\tilde{T}M(t)), U^* \rangle$

Rappelons que $\Gamma(t)$ *est défini par (4).*

Proposition 2 :

Le principe des puissances virtuelles équivaut aux équations de Lagrange (généralisées) ; plus précisément (1), (2), (4), (5) étant vérifiés les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) Le mouvement $t \rightsquigarrow M(t)$ *est faiblement pseudo-différentiable et satisfait aux principes des puissances virtuelles.*

(*) *Cette puissance comprend la puissance des forces extérieures et la puissance des forces intérieures.*

(b) $\forall U$ ouvert de Ω, $\forall c = (U,\varphi,\Delta)$ δ-carte de Ω et I_c intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $M(t)\in U$ pour $t\in I_c$. Si l'on pose $q = \varphi oM|_{I_c}$, $\mathbb{K}_c : \varphi(U)\times W \longrightarrow \mathbb{R}$ expression locale de $\mathbb{K}$ dans c, $Q_c : \varphi(U)\times W \longrightarrow V'$ expression locale de $\overline{\chi}_2 Q$ dans c alors q_c est faiblement pseudo-différentiable (de I_c dans (V,W_σ,j)) et vérifie pour tout $t\in I_c$:
$\frac{d}{dt}(\partial_2 \mathbb{K}_c(q,\dot{q})oj) - \partial_1 \mathbb{K}_c(q,\dot{q}) = Q_c(q,\dot{q})$ (égalité dans V') la dérivée $\frac{d}{dt}$ étant prise dans V'_s.

Remarque :

Bien entendu les résultats du n° 1 peuvent être transposés de façon évidente au cas où l'hypothèse (3) est remplacée par l'hypothèse plus forte :

(3 forte) M est pseudo-différentiable.

Il faut alors prendre la dérivée $\dot{q}$ des propositions 1 et 2 dans W fort.

n° 2. La transformation de Legendre et les équations canoniques.

Les résultats du n° 1 et en particulier le (b) de la proposition 2 suggèrent de poser la définition suivante :

Définition 3 :

Soit Ω une variété bimodelée dans une catégorie $\boxed{+}$ de δ-couples d'espaces de Banach et de classe $\mathcal{C}^k$ $(k>2)$, on appelle système mécanique sur Ω tout couple $(\mathbb{K},Q)$ où

- *$\mathbb{K} : \tilde{T}\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (Energie cinétique) est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.*
- *$Q : T\tilde{T}\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (puissance des forces) est une forme de Pfaff semi-basique de 1ère espèce sur $\tilde{T}\Omega$.*

La différentielle verticale $d_v\mathbb{K}$ est alors une forme de Pfaff semi-basique de 2ème espèce sur $\tilde{T}\Omega$ (*), par conséquent, si l'on applique la proposition 9 du §2, n° 7, on peut généraliser la condition de dualité

(*) *Cf. les exemples en fin de §2, n° 7.*

de Lagrange-Hamilton des systèmes mécaniques à un nombre fini de degrés de liberté en posant la

Définition 4 :

On dit que le système mécanique $(\mathbb{K},Q)$ sur Ω satisfait à la condition de dualité si l'application $D : \tilde{T}\Omega \longrightarrow \tilde{T}'\Omega$ (transformation de Legendre) déterminée par

1°) $\tilde{q}_\Omega \circ D = \tilde{p}_\Omega$

2°) $D^*\tilde{\ell} = d_v \mathbb{K}$

est un difféomorphisme (de classe $\mathcal{C}^{k-1}$).

Dans les définitions 3 et 4, $\mathbb{K}$ peut n'être pas une fonction quadratique (comme cela avait lieu dans le cas particulier du n° 1). Si l'hypothèse de dualité est vérifiée alors la catégorie Γ_2 associée à $\tilde{+}$ est nécessairement formée d'espaces de Banach réflexifs, par suite, on peut appliquer à $\tilde{T}'\Omega$ le théorème 3 du §3 et son corollaire ; on a le théorème suivant :

Théorème :

Soit $(\mathbb{K},Q)$ un système mécanique sur Ω satisfaisant à l'hypothèse de dualité, posons

$$H = D^{-1*}(W.\mathbb{K}-\mathbb{K}), \qquad F = D^{-1*}\Omega$$

(W = champ de Liouville sur $\tilde{T}\Omega$, cf. §2, proposition 6), alors

(a) Il existe un champ de pseudo-vecteurs Y unique sur la variété bimodelée $\tilde{T}'\Omega$ tel que $S(Y,.) \equiv S_b Y = - dH + F$.

(b) Si $M : I \longrightarrow \Omega$ (I = intervalle de $\mathbb{R}$) est une application continue, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Pour toute δ-carte $c = (U,\varphi,\Delta)$ de Ω et tout intervalle $I_c \subset I$ tel que $M(I_c) \subset U$, l'application $q = \varphi \circ M|_{I_c}$ est pseudo-différentiable (resp : faiblement pseudo-différentiable) et vérifie l'équation de Lagrange généralisée :

$$\frac{d}{dt}\left({}^t j\, \partial_2 \mathbb{K}_c(q,\dot{q})\right) - \partial_1 \mathbb{K}_c(q,\dot{q}) = Q_c(q,\dot{q}) \quad \text{(égalité dans } V')$$

(2) $D\tilde{o}TM : I \longrightarrow \tilde{T}'\Omega$ est une intégrale du champ de pseudo-vecteurs Y sur $\tilde{T}'\Omega$ pour la structure de variété bimodelée dans Π_{bs} (resp : $\Pi_{\sigma s}$) de $\tilde{T}'\Omega$ (corollaire 1, théorème 1 du §3).

Démonstration :

(a) est immédiat compte tenu de la réflexivité des espaces de Γ_2 *et des résultats du §3.*

(b) se démontre en raisonnant localement. Dans une δ*-carte* $c = (U, \varphi, \Delta)$ *de* Ω, $\mathbb{K}$, Q, D, H, Y *sont représentés par des applications*

$$\mathbb{K}_c : \varphi(U)\times W \longrightarrow \mathbb{R} : (x,w) \rightsquigarrow \mathbb{K}_c(x,w)$$

$$Q_c : \varphi(U)\times W \longrightarrow V' : (x,w) \rightsquigarrow Q_c(x,w)$$

$$D_c : \varphi(U)\times W \longrightarrow \varphi(U)\times W' : (x,w) \rightsquigarrow (x, L(x,w)) = (x, \partial_2 \mathbb{K}_c(x,w))$$

$$D_c^{-1} : \varphi(U)\times W' \longrightarrow \varphi(U)\times W : (x,w') \rightsquigarrow (x, L^-(x,w'))$$

$$H_c : \varphi(U)\times W' \longrightarrow \mathbb{R} : (x,w') \rightsquigarrow \partial_2 \mathbb{K}_c(x, L^-(x,w'))(L^-(x,w')) - \mathbb{K}_c(x, L^-(x,w'))$$

$$Y_c : \varphi(U)\times W' \longrightarrow \varphi(U)\times W'\times W\times V' : (x,w') \rightsquigarrow ((x,w'), (\partial_2 H_c(x,w') - \partial_1 \mathbb{H}_c(x,w') + F_c(x,w'))$$

L'identité $\partial_2 K_c(x, L^-(x,w')) = w'$, *qui traduit l'hypothèse de dualité, donne par différentiation les deux identités*

$$(3)\quad \partial_{12}\mathbb{K}_c(x, L^-(x,w'))(v_1, .) + \partial_{22}\mathbb{K}_c(x, L^-(x,w'))(\partial_1 L^-(x,w')(v_1), .) = 0$$

$$(4)\quad \partial_{22}\mathbb{K}_c(x, L^-(x,w'))(\partial_2 L^-(x,w')(w_1')) = w_1'$$

$(x \in \varphi(U)$, $v_1 \in V$, w' *et* $w_1' \in W')$. *En différentiant l'expression de* $\mathbb{H}_c$ *on trouve en usant de ces identités :*

$$\partial_1 \mathbb{H}_c(x,w')v_1 = \partial_{12}\mathbb{K}_c(x, L^-(x,w'))(v_1, L^-(x,w')) +$$

$$+ \partial_{22}\mathbb{K}_c(x, L^-(x,w'))(\partial_1 L^-(x,w')v_1, L^-(x,w'))$$

$$- \partial_1 \mathbb{K}_c(x, L^-(x,w'))v_1 = - \partial_1 \mathbb{K}_c(x, L^-(x,w')v_1$$

$$\partial_2 \mathbb{K}_c(x,w')w_1' = \partial_{22}\mathbb{K}_c(x, L^-(x,w'))(\partial_2 L^-(x,w')w_1', L^-(x,w')) = \langle w_1', L^-(x,w')\rangle$$

donc

$$(5)\quad \partial_1 \mathbb{H}_c(x,w') = - \partial_1 \mathbb{K}_c(x, L^-(x,w'))$$

$$(6)\quad \partial_2 \mathbb{H}_c(x,w') = i^{-1} L^-(x,w') \quad (i : W'' \longrightarrow W \text{ isomorphisme canonique})$$

$\widetilde{Do}TM$ *est représenté dans* c *par l'application*

$$(q,p) : I_c \longrightarrow V\times W' : t \rightsquigarrow (q(t), p(t)) = L(q(t), \dot{q}(t)) .$$

Par suite, en tenant compte de (5) et (6) :

$$\frac{d}{dt}({}^t j\partial_2 \mathbb{K}_c(q,\dot q)) - \partial_1 \mathbb{K}_c(q,\dot q) = Q(q,\dot q) \iff \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\,{}^t jp = -\partial_1 \mathbb{H}_c(q,p) + F_c(q,p) \\ \dfrac{d}{dt}\, jq = i\,\partial_2 \mathbb{H}_c(q,p) \end{cases}$$

en écrivant p, q, $\dot q$ *pour* $p(t)$, $q(t)$, $\dot q(t)$. *Le second membre de l'équivalence traduit la propriété (2). La dérivée* $\frac{d}{dt}\,{}^t jp$ *est prise dans* V_s' *et la dérivée* $\frac{d}{dt}\, jq$ *est prise dans* W *fort (resp : W faible). Le théorème est établi.*

Remarquons que l'expression locale dans c *de la transformation de Legendre est :*

$$D_c : (x,w) \rightsquigarrow (x, \partial_2 \mathbb{K}_c(x,w))$$

Si, comme dans le §1, $\mathbb{K}$ *est quadratique,* D *est un homomorphisme de* $\tilde\tau(\Omega)$ *dans* $\tilde\tau'(\Omega)$. *On est ainsi conduit à poser la définition suivante :*

Définition 5 :

On dit que le système mécanique $(\mathbb{K},Q)$ *satisfait à la condition de dualité forte s'il satisfait à la condition de dualité et si la transformation de Legendre est un isomorphisme de* $\tilde\tau(\Omega)$ *sur* $\tilde\tau'(\Omega)$.

Dans les conditions de la définition 5 il existe une section "symétrique" g *de classe* $\mathcal{C}^{k-1}$ *de* $\mathcal{L}_2(\tilde\tau(\Omega);\mathbb{R})$ *telle que*

$$\mathbb{K}(w) = \frac{1}{2}\, g(w,w)$$

section à laquelle sont associés deux isomorphismes inverses l'une de l'autre

$$g_b : \tilde\tau(\Omega) \longrightarrow \tilde\tau'(\Omega) : w \rightsquigarrow g(w,o) = g_b(w)$$
$$g : \tilde\tau'(\Omega) \longrightarrow \tilde\tau(\Omega)$$

et $\tilde\tau(\Omega)$ *est un fibré Riemannien. La transformation de Legendre n'est autre que* g_b.

n° 3. Cas particulier : Généralisation des systèmes Lagrangiens.

Lorsque la forme Q *est donnée par* $Q = d(U o \tilde p_\Omega)$ *où* U *est une fonction différentiable sur* Ω *on introduit :*

$$\left|\begin{array}{ll} \mathbb{H} = D^{-1*}(W.K-K-U\tilde{o}p_{\Omega}) : \tilde{T}'\Omega \longrightarrow \mathbb{R} & \text{(Hamiltonien)} \\ \mathbb{L} = \mathbb{K} + U\tilde{o}p_{\Omega} : \tilde{T}\Omega \longrightarrow \mathbb{R} & \text{(Lagrangien)} \end{array}\right.$$

($\mathbb{H}$ est différente de la fonction introduite au n° 2). Dans ces conditions, les résultats des n° 1 et 2 s'énoncent :

1°) Le principe des travaux virtuels équivaut aux équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}({}^t j\, \partial_2 \mathbb{L}_c(q,\dot{q})) - \partial_1 \mathbb{L}_c(q,\dot{q}) = 0$$

(où $\mathbb{L}_c$ est l'expression locale de $\mathbb{L}$ dans une δ-carte c).

2°) Si Ω est de classe $\mathcal{C}^3$ et si l'hypothèse de dualité est satisfaite, le principe des travaux virtuels équivaut à la propriété suivante :

"$D\tilde{o}TM$ est une intégrale du système dynamique $\mathcal{Y}$ associé à $\mathbb{H}'$. (c'est-à-dire que Y est le champ de pseudo-vecteurs sur $\tilde{T}\Omega$ défini par $S(Y,.) = -d\mathbb{H}$ Cf. §3). Les équations de Lagrange équivalent aux équations de Hamilton :

$$\frac{d}{dt}({}^t jp) = -\partial_1 \mathbb{H}_c(q,p), \quad \frac{d}{dt} jq = i\, \partial_2 \mathbb{H}_c(q,p).$$

CHAPITRE I.

§5. STRUCTURES DE VARIETES BIMODELEES SUR LES ESPACES DE SECTIONS DES FIBRES ET SUR LES ESPACES D'APPLICATIONS D'UNE VARIETE DANS UNE VARIETE.

Dans ce paragraphe, on montre que, moyennant une particularisation convenable et naturelle de l'axiomatique utilisée dans PALAIS I pour fonder la construction des structures de variétés de Banach sur des ensembles de sections d'espaces fibrés, on obtient en fait des structures de variétés bimodelées. Il convient de remarquer que la construction des structures de variétés de Banach sur les espaces de sections nécessite une condition (B.§5 dans PALAIS) assez restrictive et qui impose au modèle de ces variétés d'être des espaces fonctionnels inclus topologiquement dans des espaces de fonctions continues sur un compact munis de leur topologie $\mathcal{T}^0$. Cette condition intervient encore ici, bien entendu, mais pour le premier modèle des variétés bimodelées et non pour le second modèle (correspondant aux espaces pseudo-tangents). Celui-ci peut être un espace de fonctions discontinues, tel par exemple un espace L^p, et n'est astreint à vérifier aucune condition analogue à B.§5.

Nous avons renvoyé systématiquement à PALAIS pour tout ce qui ne concerne pas spécifiquement la construction des variétés bimodelées de sections en nous limitant à l'énoncé des résultats démontrés par ailleurs mais cependant utiles à la compréhension de la construction.

n° 0. Produits de δ-couples.

Rappelons que si $\Delta_\alpha = (V_\alpha, W_\alpha, j_\alpha)$ $\alpha = 1, \ldots, r$ on note $\prod_1^r \Delta_\alpha = \Delta_1 \times \ldots \times \Delta_r$, δ-couple produit de la famille des Δ_α, le δ-couple $(\prod_1^r V_\alpha, \prod_1^r W_\alpha, \prod_1^r j_\alpha)$. Ce δ-couple est strict si et seulement si tous les Δ_α le sont.

Définition 1 :

Soient $\Delta_1 = (V_1, W_1, j_1)$ et $\Delta = (V, W, j)$ deux δ-couples. On dit que Δ_1 est un sous-couple de (V, W, j) si

(a) V_1 et W_1 sont des sous-espaces vectoriels topologiques de V et W respectivement.

(b) $j_1 = j|_{V_1}$.

Il est équivalent de dire que :

(1) Le couple formé des injections canoniques $(V_1 \longrightarrow V,\ W_1 \longrightarrow W)$ est un morphisme de Δ_1 à Δ.

Définition 2 :

Soient Δ un δ-couple d'e.l.c. Δ_α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ une famille finie de sous-couples de Δ. On dit que Δ est somme directe topologique des Δ_α si les deux applications naturelles "somme" :

$\prod_1^r V_\alpha \longrightarrow V$, $\prod_1^r W_\alpha \longrightarrow W$ déterminent un isomorphisme de $\prod_1^r \Delta_\alpha$ à Δ.

On écrit alors

$$\Delta = \bigoplus_1^r \Delta_\alpha \quad \text{ou bien} \quad \Delta = \Delta_1 \oplus \ldots \oplus \Delta_r$$

(2) Pour que Δ soit la somme directe topologique des sous-couples Δ_α, il faut et il suffit que :

$$\bigoplus_{\alpha=1}^r V_\alpha = V \quad \text{et} \quad \bigoplus_{\alpha=1}^r W_\alpha = W \quad \text{(sommes directes topologiques)}$$

(Démonstration immédiate).

n° 1. Les foncteurs δ-couples d'espaces de Banach de sections d'un fibré-vectoriel.

On note $\mathcal{V}arc_n$ la catégorie des variétés $\mathcal{C}^\infty$ (à bord) compactes de dimension n.

$\mathcal{F}V_n$ la catégorie des fibrés vectoriels $\mathcal{C}^\infty$ de dimension finie à base dans $\mathcal{V}arc_n$.

$\mathcal{F}V(M)$ la catégorie des fibrés vectoriels $\mathcal{C}^\infty$ de dimension finie de base M.

Si ξ est un objet de $\mathcal{F}V_n$ on note :

$\mathcal{S}(\xi)$ l'espace vectoriel des sections de ξ.

$\mathcal{S}^k(\xi)$ l'espace vectoriel des sections de classe $\mathcal{C}^k$ de ξ.

Soit $\mathcal{O}$ une catégorie de δ-couples d'espaces de Banach attaché à deux catégories d'espaces de Banach Γ_1 et Γ_2 catégories dont les morphismes sont les applications linéaires continues. Dans le n° 1, on se propose d'étudier certains foncteurs $\mathcal{O} : V_n \longrightarrow \mathcal{O}$; un tel foncteur est entièrement déterminé par la donnée de deux autres foncteurs $\mathcal{M} : \mathcal{F}V_n \longrightarrow \Gamma_1$, $\mathcal{N} : V_n \longrightarrow \Gamma_2$ tels que

$$\mathcal{O}(\xi) = (\mathcal{M}(\xi), \mathcal{N}(\xi), j_\xi)$$

Dans la suite, nous supposerons que les axiomes suivants sont vérifiés.

(A_o) $\mathcal{O}(\xi)$ est un δ-couple de $\mathcal{O}$ tel que

$$\mathcal{S}^\infty(\xi) \subsetneq \mathcal{M}(\xi) \subseteq \mathcal{N}(\xi) \subseteq \mathcal{S}(\xi)$$

$j_\xi : \mathcal{M}(\xi) \longrightarrow \mathcal{N}(\xi)$ est l'injection canonique.

(A_1) Si ξ et η sont dans $\mathcal{F}V(M)$ (M objet de $\mathcal{V}arc_n$) et si $f : \xi \longrightarrow \eta$ est un morphisme de $\mathcal{F}V(M)$ alors l'application $f_* : \mathcal{S}(\xi) \longrightarrow \mathcal{S}(\eta) : s \rightsquigarrow fos$ induit les deux morphismes $\mathcal{M}(f) : \mathcal{M}(\xi) \longrightarrow \mathcal{M}(\eta)$, $\mathcal{N}(f) : \mathcal{N}(\xi) \longrightarrow \mathcal{N}(\eta)$ (application linéaires continues) tels que $\mathcal{O}(f)$ soit le morphisme $(\mathcal{M}(f), \mathcal{N}(f))$ de $\mathcal{O}$.

On a donc en particulier

$$\mathcal{N}(f)(j_\xi s) = j_\eta \mathcal{M}(f)(s) \quad \text{ou bien :} \quad fo(j_\xi s) = j_\eta(fos)$$

Les axiomes (A_o) et (A_1) traduisent que les foncteurs $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ vérifient notamment les conditions (B.§1) de PALAIS.

Proposition 1 :

"Les espaces de Banach $\mathcal{M}(\xi)$ et $\mathcal{N}(\xi)$ ont le caractère local". Plus précisément si ξ est dans $\mathcal{F}V(M)$ et si $s \in \mathcal{S}(\xi)$ vérifie

$(*)$ $\forall m \in M$ $\exists U$ voisinage ouvert de m et $\sigma_U \in \mathcal{M}(\xi)$ (resp : $\mathcal{N}(\xi)$)

tel que

$$\sigma_{U|U} = s|_U$$

alors $s \in \mathcal{H}_c(\xi)$ *(resp :* $\mathcal{H}_b(\xi)$*).*

Démonstration :

Donnée dans Palais (à partir de la propriété B.§1).

L'axiome (A_1) *entraîne aussi que si* ξ *est un sous-fibré de* η *alors* $O(\xi)$ *est un sous-couple de* $O(\eta)$ *(cf. n° 0).*

Proposition 2 :

Soient ξ_α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ *des fibrés de* $\mathcal{F}V(M)$ *alors* (*)

si ξ'_α *est le sous-fibré de* $\overset{r}{\underset{1}{\oplus}} \xi_\alpha$ *auquel* ξ_α *est canoniquement isomorphe :*

$$O(\overset{r}{\underset{1}{\oplus}} \xi_\alpha) = \overset{r}{\underset{1}{\oplus}} (\xi'_\alpha)$$

En particulier $O(\overset{r}{\underset{1}{\oplus}} \xi_\alpha)$ *est un* δ*-couple isomorphe à* $\overset{r}{\underset{1}{\amalg}} O(\xi_\alpha)$.

Démonstration :

Comme ξ'_α *est un sous-fibré de* $\overset{r}{\underset{1}{\oplus}} \xi_\alpha$ *on sait que* $O(\xi'_\alpha)$ *est est un sous-couple de* $O(\overset{r}{\underset{1}{\oplus}} \xi_\alpha)$. *Il suffit d'établir que (cf. n° 0)*

$$\mathcal{H}_c(\overset{r}{\underset{1}{\oplus}} \xi_\alpha) = \overset{r}{\underset{1}{\oplus}} \mathcal{H}_c(\xi'_\alpha) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_b(\overset{r}{\underset{1}{\oplus}} \xi_\alpha) = \overset{r}{\underset{1}{\oplus}} \mathcal{H}_b(\xi'_\alpha)$$

Si $p_\lambda : \overset{r}{\underset{1}{\oplus}} \xi_\alpha \longrightarrow \xi'_\lambda$ *est la projection canonique, toute section* $s \in \mathcal{S}(\overset{r}{\underset{1}{\oplus}} \xi_\alpha)$ *(en particulier* $\in \mathcal{H}_c(\overset{r}{\underset{1}{\oplus}} \xi_\alpha)$ *ou* $\in \mathcal{H}_b(\overset{r}{\underset{1}{\oplus}} \xi_\alpha)$*) s'écrit sous la forme*

$$s = \sum_{\lambda=1}^{r} s_\lambda \quad \text{avec} \quad s_\lambda = p_\lambda \circ s \in \mathcal{S}(\xi'_\lambda)$$

de façon unique. Mais d'après (A_1) *les applications* $(p_\lambda)_* : s \rightsquigarrow p_\lambda \circ s$ *déterminent les morphismes*

$$\mathcal{H}_c(p_\lambda) : \mathcal{H}_c(\overset{r}{\underset{1}{\oplus}} \xi_\alpha) \longrightarrow \mathcal{H}_c(\xi'_\lambda) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_b(p_\lambda) : \mathcal{H}_b(\overset{r}{\underset{1}{\oplus}} \xi_\alpha) \longrightarrow \mathcal{H}_b(\xi'_\lambda)$$

donc si $s \in \mathcal{H}_c(\overset{r}{\underset{1}{\oplus}} \xi_\alpha)$ *(resp :* $\mathcal{H}_b(\overset{r}{\underset{1}{\oplus}} \xi_\alpha)$*) alors* $ss_\lambda \in \mathcal{H}_c(\xi'_\lambda)$ *(resp :* $\mathcal{H}_b(\xi'_\lambda)$*).*

(*) $\overset{r}{\underset{1}{\oplus}} \xi_\alpha$ *désigne la somme de Whitney des fibrés* ξ_α *de* $\mathcal{F}V(M)$.

Le résultat en découle ; les projections associées à la somme directe

$$\overset{r}{\underset{1}{\oplus}} \mathcal{W}(\xi_\alpha) \quad (\text{resp} : \overset{r}{\underset{1}{\oplus}} \mathcal{H}(\xi_\alpha))$$

sont les morphismes $\mathcal{W}(p_\lambda)$ *(resp :* $\mathcal{H}(p_\lambda)$*).*

Dans la suite, nous supposerons que le foncteur $\mathcal{O}$ *vérifie aussi les axiomes* (A_2) *et* (A_3) *donnés ci-dessous :*

(A_2) *Soient* M *et* N *deux variétés compactes de dimension* n *et* $\varphi : N \longrightarrow M$ *un difféomorphisme de* M *dans* N*. Alors l'application* $\varphi_\xi^* : \mathcal{F}(\xi) \longrightarrow \mathcal{F}(\varphi^*\xi)$ *induit deux morphismes :*

$$\mathcal{W}(\varphi_\xi^*) : \mathcal{W}(\xi) \longrightarrow \mathcal{W}(\varphi^*\xi), \quad \mathcal{H}(\varphi_\xi^*) : \mathcal{H}(\xi) \longrightarrow \mathcal{H}(\varphi^*\xi)$$

tels que $\mathcal{O}(\varphi_\xi^*)$ *soit le morphisme* $(\mathcal{W}(\varphi_\xi^*), \mathcal{H}(\varphi_\xi^*))$ *de* $\mathcal{O}$*.*

Dans cet énoncé $\varphi^*\xi = (E \times_M N, p_1, N) \in \mathcal{F}V(N)$ *est l'image réciproque de* ξ *par* φ*,*

$$\begin{array}{ccc} N \times_M E & \longrightarrow & E \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p \\ N & \longrightarrow & M \end{array}$$

$\varphi_\xi^* : \mathcal{S}(\xi) \longrightarrow \mathcal{S}(\varphi^*\xi) : s \rightsquigarrow (id \times s\circ\varphi)$*.*

En particulier si $N \subset M$ *et* $\varphi : N \longrightarrow M$ *est l'injection canonique, on voit que la restriction* $s \rightsquigarrow s|_N$ *détermine naturellement le morphisme* $\mathcal{O}(\xi) \longrightarrow \mathcal{O}(\xi|_N)$*.*

(A_3) *Soit* N *une sous-variété compacte de dimension* n *de* M *et* $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(N)$ *telle que Supp* $\alpha \subset \overset{\circ}{N}$*. Alors l'application* $\pi_\alpha : \mathcal{F}(\xi|_N) \longrightarrow \mathcal{F}(\xi) : S \rightsquigarrow$ *prolongement de* αs *par* 0 *sur* $M \doteq N$ *induit deux morphismes :*

$$\pi_\alpha^1 : \mathcal{W}(\xi|_N) \longrightarrow \mathcal{W}(\xi), \quad \pi_\alpha^2 : \mathcal{H}(\xi|_N) \longrightarrow \mathcal{H}(\xi)$$

tels que $(\pi_\alpha^1, \pi_\alpha^2)$ *soit un morphisme* $\mathcal{O}(\xi|_N) \longrightarrow \mathcal{O}(\xi)$*.*

Théorème 1 :

Dans les conditions (A_0)*,* (A_1)*,* (A_2)*. Soient* M *une variété compacte de dimension* n*,* $M_1, \ldots, M_r$ *des sous-variétés compactes de dimension* n *dont les intérieurs recouvrent* M*. Pour* ξ *dans* $\mathcal{F}V(M)$ *on pose*

$$\hat{\mathcal{W}}(\xi) = \{(s_1, \ldots, s_r) \in \overset{r}{\underset{1}{\prod}} \mathcal{W}(\xi|_{M_i}) \mid s_i|_{M_i \cap M_j} = s_j|_{M_i \cap M_j} \quad i, j = 1, \ldots, r\}$$

$$\hat{\mathcal{H}}(\xi) = \{(s_1, \ldots, s_r) \in \overset{r}{\underset{1}{\prod}} \mathcal{H}(\xi|_{M_i}) \; s_i|_{M_i \cap M_j} = s_j|_{M_i \cap M_j} \quad i, j = 1, \ldots, r\}$$

espaces munis de leurs topologies naturels d'espaces de Banach, et l'on définit

$$F : \mathcal{M}(\xi) \longrightarrow \hat{\mathcal{M}}(\xi) : s \rightsquigarrow (s|_{M_1}, \ldots, s|_{M_r})$$

$$G : \mathcal{H}(\xi) \longrightarrow \hat{\mathcal{H}}(\xi) : s \rightsquigarrow (s|_{M_1}, \ldots, s|_{M_r})$$

$$j_\xi : \hat{\mathcal{M}}(\xi) \longrightarrow \hat{\mathcal{H}}(\xi) : (s_1, \ldots, s_r) \rightsquigarrow (j_{\xi|M_1} s_1, \ldots, j_{\xi|M_r} s_r)$$

Alors $(F,G) : \mathcal{O}(\xi) \longrightarrow (\hat{\mathcal{M}}(\xi), \hat{\mathcal{H}}(\xi), j_\xi)$ *est un isomorphisme de la catégorie des* δ*-couples d'espaces de Banach.*

Démonstration :

Le théorème de Mayer-Vietoris montre que F *et* G *sont des isomorphismes (cf. PALAIS I). La relation*

$$G \circ j_\xi = \hat{j}_\xi \circ F$$

s'établit de la façon suivante si $s \in \mathcal{M}(\xi)$

$$j_\xi F(s) = (j_{\xi|M_1} s|_{M_1}, \ldots, j_{\xi|M_r} s|_{M_r})$$

$$= (j_\xi s|_{M_1}, \ldots, j_\xi s|_{M_r}) = G\, j_\xi(s)$$

puisque d'après (A_o) j_ξ *est l'injection naturelle de* $\mathcal{M}(\xi)$ *dans* $\mathcal{H}(\xi)$.

Proposition 3 :

Soit $s \in \mathcal{J}(\xi)$ *les propriétés suivantes sont équivalentes (respectivement)*

(a) $s \in \mathcal{M}(\xi)$ *(resp :* $\mathcal{H}(\xi)$*).*

(b) $\forall N$ *sous-variété compacte de dimension* n *de* M *;*
$s|_N \in \mathcal{M}(\xi|_N)$ *(resp :* $\in \mathcal{H}(\xi|_N)$*)*

(c) $\exists M_1, \ldots, M_r$ *sous-variété compacte de dimension* n *de* M *dont les intérieurs recouvrent* M *telle que :*
$\forall i \quad s|_{M_i} \in \mathcal{M}(\xi|_{M_i})$ *(resp :* $\in \mathcal{H}(\xi|_{M_i})$*)*

Démonstration :

Il existe effectivement des recouvrements tels qu'en (c) et l'on voit immédiatement que (a) $\Longrightarrow$ *(b)* $\Longrightarrow$ *(c). L'implication (c)* $\Longrightarrow$ *(a) résulte immédiatement de l'axiome* (A_3) *et d'un argument utilisant une partition de l'unité subordonnée au recouvrement* $\overset{o}{M}_1, \ldots, \overset{o}{M}_r$ *de* M.

Détermination du foncteur $\Box$ par les δ-couples associés à des fibrés vectoriels triviaux.

Soit $\overrightarrow{\pm}_n$ la catégorie des sous-variétés (à bord) compactes de $\mathbb{R}^n$ (si $\overline{U}_1$ et $\overline{U}_2$, avec U_1 et U_2 ouverts, sont dans $\overrightarrow{\pm}_n$, $Mor(\overline{U}_1, \overline{U}_2)$ est l'ensemble des applications $\varphi : \overline{U}_1 \longrightarrow \overline{U}_2$ qui sont $\mathcal{C}^\infty$ et dont les dérivées de tous ordres sont prolongeables continûment à $\overline{U}_1$).

$\mathcal{F}V(\overrightarrow{\pm}_n)$ est la sous-catégorie des fibrés vectoriels de dimension finie et à base dans $\overrightarrow{\pm}_n$. Le théorème 1 montre que $\Box$ est entièrement déterminé par les δ-couples associés aux fibrés de $\mathcal{F}V(\overrightarrow{\pm}_n)$ et même, plus particulièrement aux fibrés de dimension 1 de $\mathcal{F}V(\overrightarrow{\pm}_n)$. On note

$\theta_U^m = (\overline{U}\times\mathbb{R}^m, \overline{U}, p_1)$ *le fibré trivial tel que* $p_1 : \overline{U}\times\mathbb{R}^m \longrightarrow \overline{U}$ *(projection)*

$\theta_U = \theta_U^1$.

Proposition 4 :

Soient $\Box : \mathcal{F}V_n \longrightarrow \mathcal{Q}$ un foncteur vérifiant (A_0), (A_1), (A_2), (A_3) et $\xi = (E, M, p)$ un fibré de $\mathcal{F}V_n$. Alors le δ-couple $\Box(\xi)$ est isomorphe à un sous-couple d'un produit fini $\Pi\, \Box(\theta_U^n)$ de δ-couple de $\mathcal{F}V(\overrightarrow{\pm}_n)$.

Comme θ_U^m est canoniquement isomorphe à $\bigoplus_1^m \theta_U$, avec la proposition 2 il revient au même de dire que $\Box(\xi)$ est isomorphe à un sous-couple d'un produit $\Pi\, \Box(\theta_U)$ avec $\overline{U}$ dans $\overrightarrow{\pm}_n$.

Démonstration :

Si, dans les conditions du théorème 1 le recouvrement $M_1, \ldots, M_r$ est choisi de façon qu'il existe

- *des morphismes (de variétés à bord) $\varphi_i : M_i \longrightarrow \overline{U}_i$ (U_i dans $\overrightarrow{\pm}_n$, $i = 1, \ldots, r$).*
- *des trivialisations $\psi_i : p^{-1}(M_i) \longrightarrow \overline{U}_i\times\mathbb{R}^m$ (isomorphismes au-dessus de φ_i)*

Alors, si l'on pose

(1) V (resp : W) = *sous-espace fermé de l'espace de Banach* $\prod_1^r \mathcal{M}(\theta_{U_i})$ (resp : $\prod_1^r \mathcal{N}(\theta_{U_i})$) *formé des* $(s_1, \ldots, s_r)$ *tels que :*

$$\psi_i^{-1} \circ s_i \circ \varphi_i|_{U_i \cap U_j} = \psi_j^{-1} \circ s_j \circ \varphi_j|_{U_i \cap U_j} \qquad i, j \in \{1, \ldots, r\},$$

(2) $J : V \longrightarrow W$ = *restriction à* V *du produit des injections* $\mathcal{M}(\theta_{U_i}) \longrightarrow \mathcal{N}(\theta_{U_i})$ *les applications*

(3) $\Phi : \mathcal{M}(\xi) \longrightarrow V : s \rightsquigarrow (s_1, \ldots, s_r)$,
$\Psi : \mathcal{N}(\xi) \longrightarrow W : s \rightsquigarrow (s_1, \ldots, s_r)$ *avec*
$s_i = \psi_i \circ s \circ \varphi_i^{-1} (\in \mathcal{M}(\theta_{U_i})$ (resp : $\in \mathcal{N}(\theta_{U_i}))$ *d'après* (A_1) *et* (A_2))

déterminent un isomorphisme $(\Phi, \Psi) : \mathcal{O}(\xi) \longrightarrow \prod_1^r \mathcal{O}(\theta_{U_i})$, *isomorphisme composé de l'isomorphisme du théorème 1 et de l'isomorphisme déterminé par le produit des* r *trivialisations.*

Inversement, il est naturel de chercher les conditions pour qu'étant donné un foncteur $\mathcal{O}_o : \dot{\pm}_n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{C} : \theta_U \rightsquigarrow \mathcal{O}_o(\theta_U)$ *on puisse trouver une extension* $\mathcal{O} : \mathcal{F}V_n \longrightarrow \mathcal{C}$ *vérifiant les axiomes* (A_o), (A_1), (A_2), (A_3). *Voici un résultat important pratiquement :*

Théorème 2 :

Etant donné un foncteur $\mathcal{O}_o : \dot{\pm}_n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{C}$, *pour qu'il existe une extension* $\mathcal{O} : \mathcal{F}V_n \longrightarrow \mathcal{C}$ *de* $\mathcal{O}_o$, *extension nécessairement unique, il faut et il suffit que les conditions suivantes aient lieu :*

(A'_o) $\mathcal{O}_o(\theta_U)$ *est un* δ*-couple de* $\mathcal{C}$ *tel que*

$$\mathcal{J}^\infty(\theta_U) \subseteq \mathcal{M}_o(\theta_U) \subseteq \mathcal{N}_o(\theta_U) \subseteq \mathcal{J}(\theta_U)$$

$j_U : \mathcal{M}_o(\theta_U) \longrightarrow \mathcal{N}_o(\theta_U)$ *est l'injection canonique.*

(A'_1) *Si* $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{U})$ *alors l'application* $f_* : \mathcal{J}(\theta_U) \longrightarrow \mathcal{J}(\theta_U) : s \rightsquigarrow fs$ *induit deux morphismes* $\mathcal{M}_o(f) : \mathcal{M}_o(\theta_U) \longrightarrow \mathcal{M}_o(\theta_U)$, $\mathcal{N}_o(f) : \mathcal{N}_o(\theta_U) \longrightarrow \mathcal{N}_o(\theta_U)$ *tels que* $\mathcal{O}_o(f)$ *soit le morphisme* $(\mathcal{M}_o(f), \mathcal{N}_o(f))$ *de* $\mathcal{C}$.

(A'_2) *Soient* $\overline{U}$ *et* $\overline{V}$ *des variétés de* $\dot{\pm}_n$ *et* $\varphi : \overline{U} \longrightarrow \overline{V}$ *un difféomorphisme de* $\overline{U}$ *dans* $\overline{V}$ *alors l'application* $\varphi^* : \mathcal{J}(\theta_U) \longrightarrow \mathcal{J}(\varphi^* \theta_V)$ *induit deux morphismes*

$\mathcal{M}_o(\varphi^*) : \mathcal{M}_o(\theta_U) \longrightarrow \mathcal{M}_o(\theta_U)$ et $\mathcal{U}_o(f) : \mathcal{U}_o(\theta_U) \longrightarrow \mathcal{U}_o(\theta_U)$ tels que $\square(\varphi^*)$ soit le morphisme $(\mathcal{M}_o(\varphi^*), \mathcal{U}_o(\varphi^*))$ de $\mathcal{C}$.

(A'_3) Soient $\overline{V}$ et $\overline{U}$ dans $\mathcal{F}_n$ avec $\overline{V} \subset U$ dans $\mathcal{F}_n$ et $\alpha \in \mathcal{E}^\infty(\overline{V})$ tel que Supp $\alpha \subset V$. Alors l'application $\pi_\alpha : \mathcal{S}(\theta_V) \longrightarrow \mathcal{S}(\theta_U) : s \rightsquigarrow$ prolongement de s par 0 sur $U - \overline{V}$ induit deux morphismes

$$\pi_\alpha^1 : \mathcal{M}_o(\theta_V) \longrightarrow \mathcal{M}_o(\theta U), \quad \pi_\alpha^2 : \mathcal{U}_o(\theta_V) \longrightarrow \mathcal{U}_o(\theta_U)$$

tels que $(\pi_\alpha^1, \pi_\alpha^2)$ soit un morphisme $\square_o(\theta_V) \longrightarrow \square_o(\theta_U)$.

Démonstration :

La nécessité des conditions et, avec la proposition 4, l'unicité sont évidentes. Montrons que les conditions sont suffisantes en construisant le foncteur $\square$.

Construction de $\square(\theta_U^m)$.

On sait que θ_U^m est canoniquement isomorphe à $\overset{m}{\underset{1}{\oplus}} \theta_U$ par l'application $X \rightsquigarrow (q_1 X, \ldots, q_m X)$ $q_i : \theta_U^m \longrightarrow \theta_U$ application "$i^{ème}$ coordonnée dans la fibré". Par suite (cf. Proposition 2).

(4) $s \in \mathcal{M}(\theta_U^m)$ (resp : $\mathcal{U}(\theta_U^m)$) $\Longleftrightarrow q_i \circ s \in \mathcal{M}_o(\theta_U)$ (resp : $\mathcal{U}_o(\theta_U)$) pour $i = 1, \ldots, m$ et l'application naturelle

$$(q_{1*}, \ldots, q_{m*}) : \mathcal{S}(\theta_U^m) \longrightarrow \prod_1^m \mathcal{S}(\theta_U)$$

induit un couple d'isomorphisme $\mathcal{M}(\theta_U^m) \longrightarrow \prod_1^m \mathcal{M}_o(\theta_U)$ et $\mathcal{U}(\theta_U^m) \longrightarrow \prod_1^m \mathcal{U}_o(\theta_U)$ formant un isomorphisme de $\square(\theta_U^m)$ sur $\prod_1^m \square(\theta_U)$.

Si $\|.\|_U$ (resp : $|.|_U$) est une norme définissant la topologie de $\mathcal{M}_o(\theta_U)$ (resp : $\mathcal{U}_o(\theta_U)$) alors, par exemple, la norme

(5) $s \rightsquigarrow \sum_1^m \|q_i \circ s\|_U = \|s\|_U^m$ (resp : $\sum_1^m |q_i \circ s|_U = |s|_U$)

définit la topologie de $\mathcal{M}(\theta_U^m)$ (resp : $\mathcal{U}(\theta_U^m)$). On vérifie aisément à partir de (A'_0), (A'_1), (A'_2), (A'_3) que (4) et (5) déterminent un foncteur $\square_1 : \mathcal{F}V(\mathcal{F}_n) \longrightarrow \mathcal{C}$ qui sur $\mathcal{F}V(\mathcal{F}_n)$ a les propriétés (A_0), (A_1), (A_2), (A_3).

Construction de $\mathcal{O}(\xi)$ pour ξ objet de $\vec{\mathcal{F}}V_n$.

Si $\mathcal{O}$ existe, nécessairement d'après la proposition 3, si ξ est dans $\vec{\mathcal{F}}V(M)$:

(6) $\mathcal{M}_{\mathcal{O}}(\xi)$ (resp : $\mathcal{N}_{\mathcal{O}}(\xi)$) = ensemble des $s \in \mathcal{S}(\xi)$ telles que pour tout isomorphisme $\varphi : N \longrightarrow \overline{U}$ (N sous-variété compacte de M, $\overline{U}$ dans $\dot{+}_n$) et toute trivialisation $\psi : p^{-1}(N) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^m$, $\psi o s o \varphi^{-1} \in \mathcal{M}_{\mathcal{O}}(\theta_U^m)$ (resp : $\mathcal{N}_{\mathcal{O}}(\theta_U^m)$).

La relation (6) détermine deux espaces vectoriels. Si existe, les topologies d'espaces de Banach de $\mathcal{M}_{\mathcal{O}}(\xi)$ et $\mathcal{N}_{\mathcal{O}}(\xi)$ sont déterminées dans les conditions de la proposition 4 à partir d'un recouvrement $M_1, \ldots, M_r$ et par transport à l'aide des bijections Φ^{-1} et ψ^{-1} des topologies entièrement déterminées par la connaissance de $\mathcal{O}_1$; la norme

$$(7) \quad s \rightsquigarrow ||s|| = \sum_1^r ||\psi_i o s o \varphi_i^{-1}||_{U_i}^m \quad (\text{resp} : |s| = \sum_1^r |\psi_i o s o \varphi_i^{-1}|_{U_i}^m)$$

définit la topologie de $\mathcal{M}_{\mathcal{O}}(\xi)$ (resp : $\mathcal{N}_{\mathcal{O}}(\xi)$). On vérifie alors facilement que la correspondance associant à tout ξ de $\vec{\mathcal{F}}V_n$ le δ-couple de $\mathcal{B}$ $(\mathcal{M}_{\mathcal{O}}(\xi), \mathcal{N}_{\mathcal{O}}(\xi), j_\xi)$ où j est l'injection canonique détermine un foncteur $\mathcal{O} : \vec{\mathcal{F}}V_n \longrightarrow \mathcal{B}$ ayant les propriétés requises. En particulier la topologie définie par la norme (7) sur $\mathcal{M}_{\mathcal{O}}(\xi)$ (resp : $\mathcal{N}_{\mathcal{O}}(\xi)$) est indépendante du recouvrement $M_1, \ldots, M_r$ choisi.

Remarques :

1°) Pour que $\mathcal{O}(\xi)$ soit strict pour tout ξ, il faut et il suffit que $\mathcal{O}(\theta_U)$ (resp : $\mathcal{O}(\theta_U^m)$) soit strict pour tout $U \in \dot{+}_n$ (resp : et pour tout m). La condition est nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. Soit $s \in \mathcal{M}_{\mathcal{O}}(\xi)$ si l'on se place dans les conditions de la démonstration du théorème 2 et si $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\overset{o}{M}_1, \ldots, \overset{o}{M}_r$ de M, pour chaque $i \in \{1, \ldots, r\}$ il existe par hypothèse $\sigma_i \in \mathcal{M}_{\mathcal{O}}(\theta_{U_i}^m)$ tel que

$$|\beta_i \circ (\psi_i o s o \varphi_i^{-1} - j_{\theta_{U_i}} \sigma_i)|_{U_i}^m \leq \frac{1}{r} \varepsilon \qquad \beta_i = \psi_i o \sigma_i o \varphi_i^{-1} \in \mathcal{D}^\infty(U_i)$$

Si l'on définit alors la section σ de ξ par

$$\sigma = \sum_1^r s_i \quad \text{avec } s_i = \text{prolongement de } \alpha_i \cdot (\psi_i^{-1} o \sigma_i o \varphi_i) \text{ par 0 sur } M \div M_i$$

on a $\sigma \in \mathcal{M}_{\mathcal{O}}(\xi)$ et $|s - j_\xi \sigma| \leq \varepsilon$.

2°) *Certains foncteurs utilisés en pratique peuvent être légèrement plus généraux que les foncteurs* O *étudiés jusqu'ici. Désignons par* $\mathcal{L}(\xi)$ *le sous-espace vectoriel de* $\mathcal{J}(\xi)$ *formé des sections nulles presque partout et supposons que les foncteurs* $\mathcal{M} : \mathcal{F}V_n \longrightarrow \Gamma_1$ *et* $\mathcal{N} : \mathcal{F}V_n \longrightarrow \Gamma_2$ *vérifient :*

$(*_{A_0})$ $\mathcal{M}(\xi)$ *et* $\mathcal{N}(\xi)$ *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathcal{J}(\xi)/\mathcal{L}(\xi)$ *tels que*

$$\mathcal{J}^\infty(\xi) \longrightarrow \mathcal{M}(\xi) \subseteq \mathcal{N}(\xi) \subseteq \mathcal{J}(\xi)/\mathcal{L}(\xi)$$

(la flèche exprime que $\mathcal{M}(\xi)$ *contient l'image canonique de* $\mathcal{J}^\infty(\xi)$ *dans* $\mathcal{J}(\xi)/\mathcal{L}(\xi)$

j_ξ = *injection canonique de* $\mathcal{M}(\xi)$ *dans* $\mathcal{N}(\xi)$.

Les axiomes (A_1), (A_2), (A_3) *étant vérifiés pour les classes de sections en remplaçant* $\mathcal{J}(\xi)$ *par* $\mathcal{J}(\xi)/\mathcal{L}(\xi)$. (*)

Dans ces conditions, à des modifications de détail de forme près, tout ce qui précède est encore valable pour le foncteur $O : \xi \longrightarrow (\mathcal{M}(\xi), \mathcal{N}(\xi), j_\xi)$; *cela revient à "ne pas distinguer deux sections de* ξ *qui sont égales presque partout sur* M".

Exemple 1 :

On prend $\Gamma_1 = \Gamma_2$ = *catégorie des espaces de Banach. Si* $\mathcal{J}^k(\xi)$ (k *entier* ≥ 0) *est l'espace vectoriel des sections de classe* $\mathcal{C}^k$ *de* ξ *muni de la topologie de la "convergence uniforme sur* M *des jets d'ordre* $\leq k$" (**) *alors le foncteur*

$$O = (\mathcal{J}^k, \mathcal{J}^h) \quad \text{avec} \quad 0 \leq h < k$$

vérifie les conditions (A_0), (A_1), (A_2), (A_3).

Exemple 2 :

Foncteurs "espaces de Schauder". On prend $\Gamma_1 = \Gamma_2$ = *catégorie des espaces de Banach. Si* $U \in \mathcal{T}_n$, k *entier* ≥ 0, $0 < \alpha \leq 1$ *on définit* $\mathcal{C}^{k+\alpha}(\overline{U})$ = *espace vectoriel des applications* $\overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe*

(*) *On remarque que les applications* f_* (*resp :* $\varphi_\xi^*, \pi_\alpha$) *de* (A_1) (*resp.* (A_2), (A_3)) *sont compatibles avec la relation d'équivalence "égalité presque partout".*

(**) *On peut toujours munir* ξ *et les fibrés de jets* $\mathcal{J}^j(\xi)$ *de structures Riemaniennes.*

n° 2. Les axiomes (A_4), (A_5) et leurs conséquences.

Soit M une variété compacte de dimension n, nous noterons

$\mathcal{F}V(M)$ la catégorie des fibrés vectoriels $\mathcal{C}^\infty$, de dimension finie et de base M.

$\mathcal{F}b(M)$ la catégorie des fibrés $\mathcal{C}^\infty$ dont les fibres sont des variétés différentielles de dimension finie et paracompactes, de base M.

Dans chacune de ces catégories les morphismes sont définis de la façon habituelle(*).

Dans la suite, nous utiliserons une catégorie intermédiaire entre $\mathcal{F}V(M)$ et $\mathcal{F}b(M)$:

$\mathcal{F}Vb(M)$ est la catégorie dont les objets sont les fibrés vectoriels $\mathcal{C}^\infty$ de base M et dont les morphismes sont les applications $\mathcal{C}^\infty$ qui appliquent fibre dans fibre.

Autrement dit

- $\mathcal{F}V(M)$ et $\mathcal{F}Vb(M)$ contiennent les mêmes objets (fibrés vectoriels).
- Si ε, η sont des fibrés vectoriels $Mor(\varepsilon,\eta)$ (dans $\mathcal{F}Vb(M)$) $= Mor(\varepsilon,\eta)$ (dans $\mathcal{F}b(M)$).

Si ε est dans $\mathcal{F}b(M)$ on notera $\mathcal{J}(\varepsilon)$ l'ensemble des sections de ε, $\mathcal{J}^k(\varepsilon)$ l'ensemble des sections de classe $\mathcal{C}^k$ de ε.

$\mathcal{O}$ Γ_1 et Γ_2, $\Omega : \mathcal{F}V(M) \longrightarrow \mathcal{O}$, $\mathcal{M} : \mathcal{F}V(M) \longrightarrow \Gamma_1$, $\mathcal{M} : \mathcal{F}V(M) \longrightarrow \Gamma_2$ sont des catégories et foncteurs définis comme dans le n° 1. On introduira aussi la catégorie $\Gamma_1^{(k)}$ dont les objets sont ceux de Γ_1 mais dont les morphismes sont les applications de classe $\mathcal{C}^k$ (k entier ≥ 0 ou $+\infty$). L'axiome (A_4) concerne le seul foncteur $\mathcal{M}$:

(A_4) Si ξ est un fibré vectoriel de base M alors

$$\mathcal{J}^\infty(\xi) \subseteq \mathcal{M}(\xi) \subseteq \mathcal{J}^0(\xi)$$

et l'injection canonique de $\mathcal{M}(\xi)$ dans $\mathcal{J}^0(\xi)$ muni de la topologie de la convergence uniforme est continue.

(*) Ce que nous appelons fibré (de base M) est appelé fibration (de base M) dans Bourbaki IV. Les définitions de ce n° 2 sont celles de ce dernier ouvrage ; en particulier la paracompacité n'est pas conséquence des axiomes desdvariétés de Bourbaki qui ne suppose pas que l'espace topologique sous-jacent à une variété est métrisable.

. $\mathcal{H}$ détermine un foncteur $\mathcal{H}^0 : \mathcal{F}Vb(M) \longrightarrow \Gamma_1^{(o)}$ et si ξ et η sont des objets de $\mathcal{F}Vb(M)$ et $f : \xi \longrightarrow \eta$ est un morphisme (de $\mathcal{F}Vb(M)$) alors l'application

$$f_* : \mathcal{S}(\xi) \longrightarrow \mathcal{S}(\xi) : s \rightsquigarrow fos$$

induit le morphisme $\mathcal{H}^0(f) : \mathcal{H}(\xi) \longrightarrow \mathcal{H}(\eta)$ (application continue).

L'axiome (A_5) concerne l'existence d'extensions d'applications multilinéaires.

(A_5) Soient $\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta$ dans $\mathcal{F}Vb(M)$ et $f : \xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_r \longrightarrow \eta$. Alors l'application multilinéaire $f_* : \mathcal{S}(\xi_1) \times \ldots \times \mathcal{S}(\xi_r) \longrightarrow \mathcal{S}(\eta)$ telle que

$$f_*(s_1, \ldots, s_r)(m) = f(m)(s_1(m), \ldots, s_r(m)) \qquad m \in M$$

induit une application multilinéaire continue(*).

$$\mathcal{H}^r(f) : \mathcal{H}(\xi_1) \times \ldots \times \mathcal{H}(\xi_r) \longrightarrow \mathcal{H}(\eta)$$

et pour chaque $i \in \{1, \ldots, r\}$ une application multilinéaire continue

$$\mathcal{H}_i^r(f) : \mathcal{H}(\xi_1) \times \ldots \times \mathcal{H}(\xi_i) \times \ldots \mathcal{H}(\xi_r) \longrightarrow \mathcal{H}(\eta)$$

telle que

$$\mathcal{H}^r(f) \circ (id \times \ldots \times j_{\xi_i} \times \ldots \times id) = j_\eta \circ \mathcal{H}^r(f)$$

Introduisons maintenant maintenant quelques notations.

. Si ξ et η sont des fibrés vectoriels de base M, et si $f : \xi \longrightarrow \eta$ est un morphisme de $\mathcal{F}Vb(M)$, on note

$$d_V f : \xi \longrightarrow \mathcal{L}(\xi, \eta)$$

la différentielle verticale - ou "selon les fibres" - du morphisme f. Plus généralement, on définit $d_V^r f : \xi \longrightarrow \mathcal{L}_s^r(\xi, \eta)$ par

$$d_V^{r+1} f = i_r \, d_V(d_V^r f) \quad \text{où} \quad i_r : \mathcal{L}(\xi, \mathcal{L}^r(\xi, \eta)) \longrightarrow \mathcal{L}^{r+1}(\xi, \eta)$$

est l'isomorphisme canonique.

(*) L'existence de l'application multilinéaire continue $\mathcal{H}^r(f)$ est conséquence de (A_4).

• *L'application canonique d'évaluation* $\gamma : \mathcal{L}^r(\xi,\eta) \oplus (\overset{r}{\underset{1}{\oplus}} \xi) \longrightarrow \eta$

est un morphisme multilinéaire donc, il existe des morphismes(*)

$$\left|\begin{array}{l} \mathcal{W}^{r+1}(\gamma) : \mathcal{W}(\mathcal{L}^r(\xi,\eta)) \times \overset{r}{\underset{1}{\prod}} \mathcal{W}(\xi) \longrightarrow \mathcal{W}(\eta) \\ \mathcal{M}_i^{r+1}(\gamma) : \mathcal{W}(\mathcal{L}^r(\xi,\eta)) \times \mathcal{W}(\xi) \times \ldots \times \mathcal{M}(\xi) \times \ldots \times \mathcal{W}(\xi) \longrightarrow \mathcal{M}(\eta) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i \in \{1,\ldots,r\} \end{array}\right.$$

tels que

$$\left|\ \mathcal{M}_i^{r+1}(\gamma) \circ (id \times \ldots \times j_{\xi_i} \times \ldots id) = j_\eta \circ \mathcal{W}^{r+1}(\gamma)\right.$$

Les applications naturelles suivantes s'en déduisent :

$$(1)\quad \left|\begin{array}{l} \overset{\sim}{\cdot} : \mathcal{W}(\mathcal{L}^r(\xi,\eta)) \longrightarrow \mathcal{L}^r(\mathcal{W}(\xi) \times \ldots \times \mathcal{W}(\xi) \ ; \ \mathcal{W}(\eta)) \\ \overset{\sim}{\cdot} : \mathcal{W}(\mathcal{L}^r(\xi,\eta)) \longrightarrow \mathcal{L}^r(\mathcal{W}(\xi) \times \ldots \times \mathcal{M}(\xi) \times \ldots \times \mathcal{W}(\xi) \ ; \ \mathcal{M}(\eta)) \end{array}\right.$$

avec

$$\overset{\sim}{\Phi}(s_1, \ldots, s_r)(m) = \Phi(m)(s_1(m), \ldots, s_r(m)), \quad s_1, \ldots, s_r \in \mathcal{W}(\xi)$$

$$\overset{\sim}{\Phi}(s_1, \ldots, s_r)(m) = \Phi(m)(s_1(m), \ldots, s_r(m)), \quad s_j \in \mathcal{W}(\xi) \quad j \neq i, \quad s_i \in \mathcal{M}(\xi)$$

Si $F : \xi \longrightarrow \mathcal{L}^r(\xi,\eta)$ *est un morphisme de* $\mathcal{F}Vb(M)$ *le composé de* $\mathcal{W}^\circ(F)$ *et de l'application* $\overset{\sim}{\cdot}$ *(resp :* $\overset{\sim}{\cdot}$*) est une application de classe* $\mathcal{C}^\circ$

$$\left|\begin{array}{l} \underset{\sim}{\mathcal{W}}^\circ(F) : \mathcal{W}(\xi) \longrightarrow \mathcal{L}^r(\mathcal{W}(\xi) \times \ldots \times \mathcal{W}(\xi) \ ; \mathcal{W}(\eta)) : s \rightsquigarrow \mathcal{W}^\circ(F)(s \\ (\text{resp } : \widetilde{\mathcal{W}}_i^\circ(F) : \mathcal{W}(\xi) \longrightarrow \mathcal{L}^r(\mathcal{W}(\xi) \times \ldots \times \mathcal{M}_i(\xi) \times \ldots \times \mathcal{W}(\xi) \ ; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{M}(\eta)) : s \rightsquigarrow \mathcal{W}^\circ(F)(s)) \end{array}\right.$$

En particulier, si $f : \xi \longrightarrow \eta$ *est un morphisme, on peut définir :*

$$\left|\begin{array}{l} \underset{\sim}{\mathcal{W}}^\circ(d_V^r f) : \mathcal{W}(\xi) \longrightarrow \mathcal{L}^r(\mathcal{W}(\xi) \times \ldots \times \mathcal{W}(\xi) \ ; \mathcal{W}(\eta)) \\ \widetilde{\mathcal{W}}_i^\circ(d_V^r f) : \mathcal{W}(\xi) \longrightarrow \mathcal{L}^r(\mathcal{W}(\xi) \times \ldots \times \mathcal{M}_i(\xi) \times \ldots \times \mathcal{W}(\xi) \ ; \mathcal{M}(\eta)) \end{array}\right.$$

et l'on a

$$(3)\quad \left| \ j_\eta \circ \underset{\sim}{\mathcal{W}}^\circ(d_V^r f) = \widetilde{\mathcal{W}}_i^\circ(d_V^r f) \circ (id \times \ldots \times \underset{i}{j_\xi} \times \ldots \times id)\right.$$

Voici le résultat essentiel du n° 2.

(*) *On utilise le fait que* $\mathcal{W}(\overset{r}{\underset{1}{\oplus}} \xi_\nu)$ *est isomorphe à* $\overset{r}{\underset{1}{\prod}} \mathcal{W}(\xi_\nu)$ *(cf. proposition 2), ce morphisme est le composé de ce que l'on devrait en toute rigueur noter* $\mathcal{W}(\gamma)$ *et d'un isomorphisme canonique.*

Théorème 3 :

Si $\mathrm{O} : \mathcal{F}V(M) \longrightarrow \Theta$ *est un foncteur vérifiant les axiomes* (A_0), (A_1), (A_2), (A_3), (A_4), (A_5) *alors pour tout* ξ *et* η *dans* $\mathcal{F}V(M)$ *et tout morphisme* $f : \xi \longrightarrow \eta$ *l'application* $\mathcal{M}_{\mathrm{O}}^{\circ}(f) : \mathcal{M}_{\mathrm{O}}(\xi) \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{O}}(\eta)$ *est bidifférentiable de classe* $\mathcal{C}^{\infty}$ *relativement aux* δ*-couples* $\mathrm{O}(\xi)$ *et* $\mathrm{O}(\eta)$.

De plus :

$$\mathcal{M}_{\mathrm{O}}^{\circ}(f)' = \underset{\sim}{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}^{\circ}(d_V f), \qquad \mathcal{M}_{\mathrm{O}}^{\circ}(f)^{\circ} = \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}^{\circ}(d_V f)$$

$$\mathcal{M}_{\mathrm{O}}^{\circ}(f)^{(k)} = \underset{\sim}{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}^{\circ}(d_V^k f), \qquad \mathcal{M}_{\mathrm{O}}^{\circ}(f)^{\circ(k-1)} = \widetilde{\mathcal{M}}_{1\mathrm{O}}^{\circ}(d_V^r f)$$

Démonstration :

La différentiabilité $\mathcal{C}^{\infty}$ *de* $\mathcal{M}_{\mathrm{O}}^{\circ}(f)$ *s'établit comme dans PALAIS I (théorème 11.3) l'expression des différentielles est avec nos notations :*

$$\mathcal{M}_{\mathrm{O}}^{\circ}(f)^{r} = \underset{\sim}{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}^{\circ}(d_V^r f)$$

le reste du théorème découle des conséquences de l'axiome (A_5) *qui ont été développées plus haut (cf. (3)).*

Théorème 2 bis :

Dans les conditions du théorème 2 :

1°) Pour que $\mathcal{M}_{\mathrm{O}}$ *vérifie* (A_4), *il faut et il suffit que la propriété suivante ait lieu.*

(A_4') . *Pour tout entier* m *et tout* $\overline{U}$ *dans* $\dot{+}_n$: $\mathcal{J}^{\infty}(\theta_U^m) \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{O}}(\theta_U^m) \subseteq \mathcal{J}^{\circ}(\theta_U^m)$. *l'injection* $\mathcal{M}_{\mathrm{O}}(\theta_U^m) \longrightarrow \mathcal{J}^{\circ}(\theta_U^m)$ *étant continue.*

. *Pour tout couple d'entiers* ℓ, m *et tout couppe* $\overline{U}$, $\overline{V}$ *dans* $\dot{+}_n$, *et pour tout application* $\mathcal{C}^{\infty}$, $f : \theta_U^{\ell} \longrightarrow \theta_V^m$ *conservant les fibres l'application* $s \rightsquigarrow fos$ *est continue de* $\mathcal{M}_{\mathrm{O}}(\theta_U^{\ell})$ *dans* $\mathcal{M}_{\mathrm{O}}(\theta_V^m)$.

2°) Pour que le foncteur O *vérifie l'axiome* (A_5), *il faut et il suffit que la propriété suivante ait lieu :*

(A_5') *Pour tout* $\overline{U}$ *dans* $\dot{+}_n$ *l'application bilinéaire*

$$\beta : \mathcal{J}(\theta_U) \times \mathcal{J}(\theta_U) \longrightarrow \mathcal{J}(\theta_U)$$

telle que $\beta(\sigma, s)(m) = \sigma(m)\, s(m)$, *induit deux applications bilinéaires continues*

$$\underset{\sim}{\beta} : \mathcal{M}_b(\theta_U) \times \mathcal{M}_b(\theta_U) \longrightarrow \mathcal{M}_b(\theta_U)$$
$$\tilde{\beta} : \mathcal{M}_b(\theta_U) \times \mathcal{H}_b(\theta_U) \longrightarrow \mathcal{H}_b(\theta_U)$$

telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_b(\theta_U) \times \mathcal{H}_b(\theta_U) & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \mathcal{H}_b(\theta_U) \\ \uparrow{\scriptstyle id\times j} & & \uparrow{\scriptstyle j} \\ \mathcal{M}_b(\theta_U) \times \mathcal{M}_b(\theta_U) & \xrightarrow{\underset{\sim}{\beta}} & \mathcal{M}_b(\theta_U) \end{array}$$

Démonstration :

Le 1°) s'établit aisément en utilisant l'isomorphisme Φ *((3) du n° 1), l'expression de la norme* $||.||$ *(7) du n° 1) et les expressions locales de f. Pour établir le 2°) on remarque que* $\mathcal{M}_b(\theta_U)$ *est une algèbre de Banach dans les conditions de* (A'_5) *et que par suite cet axiome s'étend de lui-même en "raisonnant sur les composantes" au cas d'un morphisme multilinéaire quelconque :*

$$\mu : \mathcal{S}(\theta_U^{m_1}) \times \ldots \times \mathcal{S}(\theta_U^{m_r}) \longrightarrow \mathcal{S}(\theta_U^{\ell})$$

Il suffit ensuite de se ramener localement au cas trivial en utilisant les isomorphismes Φ *et* Ψ *et les expressions des normes* $||.||$ *et* $|.|$ *donnnées au n° 1.*

Exemples :

On reprend les exemples du n° 1.

. Les axiomes (A_4) *et* (A_5) *sont vérifiés dans les exemples 1 et 2 et ne le sont pas dans l'exemple 3.*

. Dans les exemples 4 et 5, les axiomes (A_4) *et* (A_5) *sont vérifiés lorsque* $k - \frac{h}{p} > 0$.

n° 3. Les espaces de sections $\overline{\mathcal{M}}(\varepsilon)$ *attachés aux fibrés de* $\mathcal{F}b(M)$ *et leurs structures de variétés bimodelées.*

La construction des variétés bimodelées de sections d'un espace fibré s'appuie sur la construction préalable de "voisinages fibrés vectoriels"(*)*, le (A) du n° 3 rappelle brièvement ce dont il s'agit*

(*) *Termes utilisés ici comme traduction de "Vector bundle neighborhood" (cf. PALAIS I).*

(pour plus de détails, on pourra se reporter à Palais I ou Lang I).

A) La notion de voisinage fibré vectoriel d'une section d'un fibré.

Définition 3 :

Soient $\varepsilon = (E,\pi,M)$ un fibré $\mathcal{C}^\infty$, $s \in \mathcal{J}^0(\varepsilon)$ une section continue de ε. Un voisinage fibré vectoriel de s dans ε (en abrégé v.f.v. de s) est un fibré vectoriel $\xi = (E_1,p,M)$ tel que :

(α) ξ est un sous-fibré ouvert de ε.

(β) $s \in \mathcal{J}^0(\xi)$.

En termes plus précis (α) signifie que E_1 est un ouvert de E et que l'injection canonique $i_\xi : E_1 \longrightarrow E$ est un morphisme de fibré, (β) signifie qu'il existe $\sigma \in \mathcal{J}^0(\xi)$ tel que $s = i_\xi \circ \sigma$.

Si $s : M \longrightarrow E$ est une section $\mathcal{C}^\infty$ de ε on note $\mathcal{C}_s(\varepsilon)$ le fibré vectoriel image réciproque par s du fibré tangent aux fibres de ε. (On sait que si ξ est un fibré vectoriel de base M et si $s \in \mathcal{J}^0(\xi)$ alors $\mathcal{C}_s(\xi)$ est isomorphe à ξ). On démontre les résultats fondamentaux suivants (la démonstration figure dans PALAIS I).

Proposition 5 :

1°) Si ε est un espace fibré de base M et si $s \in \mathcal{J}^\infty(\varepsilon)$, est un v.f.v. de s alors ξ est isomorphe à $\mathcal{C}_s(\varepsilon)$.

2°) ("Unicité" des v.f.v.). Si ε est un fibré de base M, $s \in \mathcal{J}^0(\varepsilon)$ et si ξ_1 et ξ_2 sont des v.f.v. de s alors ξ_1 et ξ_2 sont des fibrés isomorphes.

Proposition 6 :

Existence des v.f.v.

Soient $\varepsilon = (E,p,M)$ un fibré à fibres paracompactes dont la base M est une variété différentielle paracompacte de dimension finie et $s \in \mathcal{J}^0(\varepsilon)$ alors

- Pour tout voisinage V de $S(M)$ dans E il existe un v.f.v. de s $\xi = (E_1, p|_{E_1}, M)$ tel que $E_1 \subset V$.
- Si, de plus $s \in \mathcal{J}^\infty(\varepsilon)$ il est possible de choisir ξ de façon que s soit la section nulle de ξ.

B) Extension du foncteur $\mathcal{M}$.

On considère toujours une variété compacte M et les foncteurs $\mathcal{O} : \mathcal{F}V(M) \longrightarrow \mathcal{O}$ $\mathcal{M} : \mathcal{F}V(M) \longrightarrow \Gamma_1$, $\mathcal{M}' : \mathcal{F}'V(M) \longrightarrow \Gamma_2$ vérifiant (A_o) ... (A_5). Il est démontré dans PALAIS I que les propriétés du foncteur $\mathcal{M}$ contenues dans ces axiomes permettent de déterminer une extension $\overline{\mathcal{M}}$: $\mathcal{F}b(M) \longrightarrow \mathcal{C}ar(\Gamma_1)$ (catégorie des variétés de Banach modelées dans Γ_1) de ce foncteur. Nous allons montrer qu'en fait, ces axiomes assurent l'existence d'une extension.

$\overline{\mathcal{M}}$: $\mathcal{F}b(M) \longrightarrow \mathcal{C}ar(\mathcal{O})$ (catégorie des variétés bimodelées dans $\mathcal{O}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$).

Définition 4 :

Soit ε un objet de $\mathcal{F}b(M)$, on pose

$\overline{\mathcal{M}}(\varepsilon) = \{s \in \mathcal{S}(\varepsilon) \mid \exists \xi$ fibré vectoriel et sous-fibré ouvert de ε tel que $s \in \mathcal{M}(\xi)\}$ autrement dit

$$\overline{\mathcal{M}}(\varepsilon) = \bigcup_{\xi \text{ dans } \mathcal{F}V(M),\ \xi \text{ sous-fibré ouvert de } \varepsilon} \mathcal{M}(\xi)$$

On démontre (cf. Palais I).

Lemme 1 :

Soient ε un fibré de base M, $s \in \mathcal{S}^o(\varepsilon)$, ξ_1 et ξ_2 des v.f.v. de s. Il existe alors un morphisme (de $\mathcal{F}b(M)$) $f : \xi_2 \longrightarrow \xi_2$ tel que f est l'identité au voisinage de $s(M)$.

Proposition 7 :

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $s \in \overline{\mathcal{M}}(\varepsilon)$.

(b) $s \in \mathcal{S}^o(\varepsilon)$ et $s \in \mathcal{M}(\xi)$ pour tout v.f.v. ξ de s dans ε.

Avec l'axiome (A_4) on voit facilement que $\mathcal{S}^\infty(\varepsilon) \subset \overline{\mathcal{M}}(\varepsilon) \subset \mathcal{S}^o(\varepsilon)$.

Théorème 4 :

On suppose que le foncteur $\mathcal{O} : \mathcal{F}V(M) \longrightarrow \mathcal{O}$ vérifie les 6 axiomes (A_o) ... (A_5). Soient $\varepsilon_1 = (E_1, p_1, M)$ et $\varepsilon_2 = (E_2, p_2, M)$ des fibrés de base M (variété compacte de dimension finie) et $f : \varepsilon_1 \longrightarrow \varepsilon_2$ un morphisme alors

(a) $f_* : \mathcal{J}^0(\varepsilon_1) \longrightarrow \mathcal{J}^0(\varepsilon_2) : s \rightsquigarrow fos$ induit sur $\overline{\mathcal{M}}(\varepsilon_1)$ une application

$$\overline{\mathcal{M}}^0(f) : \overline{\mathcal{M}}(\varepsilon_1) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}(\varepsilon_2)$$

(b) Si ξ_1 (resp : ξ_2) est un fibré vectoriel, sous-fibré ouvert de ε_1 (resp : ε_2) alors

$$U = \{s \in \mathcal{M}(\xi_1) \mid \overline{\mathcal{M}}(f)(s) \in \mathcal{M}(\xi_2)\}$$

est un ouvert de $\mathcal{M}(\xi_1)$ et $\mathcal{M}(f)|_U$ est une application bidifférentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$ relativement aux δ-couples $\mathcal{O}(\xi_1)$ et $\mathcal{O}(\xi_2)$.

Démonstration du (a) :

Si $s \in \overline{\mathcal{M}}(\varepsilon_1) \subset \mathcal{J}^0(\varepsilon_1)$: $f_*(s) \in \mathcal{J}^0(\varepsilon_2)$. Soient ξ_2 un v.f.v. de $f(s)$ dans ε_2 et ξ_1 un v.f.v. de s dans ε_1 tels que (*)

$$\xi_1 \subseteq f^{-1}(\xi_2)$$

(cf. Proposition 6) alors $g = f|_{\xi_1}$ est un morphisme d'espaces fibrés, d'après la proposition 7, $s \in \mathcal{M}(\xi_1)$ et d'après l'axiome (A_4)

$$f_*(s) = g_*(s) \in \mathcal{M}(\xi_2)$$

Avec la définition 3, on a donc $f_*(s) \in \overline{\mathcal{M}}(\varepsilon_2)$.

Démonstration du (b) :

Si ξ_1 et ξ_2 sont des fibrés vectoriels, sous-fibrés ouverts de ε_1 et ε_2 respectiverent $\mathcal{O} = \xi_1 \cap f^{-1}(\xi_2)$ (*) est ouvert dans ξ_1, l'ensemble des sections de ξ_1 à valeurs dans $\mathcal{O}$ est ouvert dans $\mathcal{J}^0(\xi_1)$ et U sui n'est autre que l'ensemble des $s \in \mathcal{M}(\xi_1)$ à valeurs dans $\mathcal{O}$ est ouvert dans $\mathcal{M}(\xi_1)$ dont la topologie est plus fine que celle de $\mathcal{J}^0(\varepsilon_1)$ (Axiome (A_4)).

Pour démontrer la propriété de bidifférentiabilité sur U, il suffit de démontrer cette propriété au voisinage de chaque $s \in U$. Or, d'après la proposition 6, il existe un v.f.v. η de s dans ε_1

(*) Afin de ne pas alourdir les notations on "confond" les fibrés et leurs espaces sous-jacents.

avec

$$\eta \subseteq \xi_1 \cap f^{-1}(\varepsilon_2)$$

et d'après le lemme 1 on peut construire un morphisme de $\mathcal{F}b(M)$

$$g : \xi_1 \longrightarrow \eta$$

égal à l'identité sur un voisinage $\mathcal{O}_1$ *de* $S(M)$ *; dans ces conditions* fog *est un morphisme de* $\mathcal{F}b(M)$ *donc avec le théorème 3, l'application*

$$\mathcal{M}_0(fog) : \mathcal{M}_0(\xi_1) \longrightarrow \mathcal{M}_0(\xi_2)$$

est bidifférentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$ *relativement aux* δ*-couples* $\square(\xi_1)$ *et* $\square(\xi_2)$*. Mais l'ensemble*

$$U_1 = \{\sigma \in \mathcal{M}_0(\xi_1) \mid \sigma(M) \subset \mathcal{O}_1\}$$

est un voisinage de S *dans* $\mathcal{M}_0(\xi_1)$ *(en vertu du même raisonnement que pour* U *ci-dessus) et, de plus :*

$$\mathcal{M}_0(fog)\big|_{U_1} = \mathcal{M}_0(f)\big|_U$$

$\mathcal{M}_0(f)$ *est donc bidifférentiable de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *au voisinage de chaque* $S \in U$ *ce qui établit le (b).*

Corollaire 1 :

Si $\square : \mathcal{F}V(M) \longrightarrow O$ *vérifie les 6 axiomes* $(A_0) \ldots (A_5)$ *alors*

(c) Pour tout ε *dans* $\mathcal{F}b(M)$ *il existe une structure de variété bimodelée dans* Θ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *unique sur* $\overline{\mathcal{M}_0}(\varepsilon)$ *telle que* $\forall \xi$ *fibré vectoriel, sous-fibré ouvert de* $\varepsilon, \mathcal{M}_0(\xi)$ *est une sous-variété bimodelée ouverte de* $\overline{\mathcal{M}_0}(\varepsilon)$*.*

(d) Si $f : \varepsilon_1 \longrightarrow \varepsilon_2$ *est un morphisme de* $\mathcal{F}b(M)$ *alors*

$$\overline{\mathcal{M}_0}(f) : \overline{\mathcal{M}_0}(\varepsilon_1) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}_0}(\varepsilon_2)$$

est une application bidifférentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$*.*

Autrement dit, le foncteur $\mathcal{M}_0 : \mathcal{F}V(M) \longrightarrow \Gamma_1$ *attaché à* $\square$ *admet une extension* $\mathcal{M}_0 : \mathcal{F}b(M) \longrightarrow \mathcal{V}ar\ (\Theta)$*.*

Démonstration du (a) :

Si dans le théorème on prend $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ $f = id$ *on voit que les* δ*-cartes* $(U_\xi, \varphi_\xi, \mathcal{O}(\xi))$ *où* ξ *est un fibré vectoriel, sous-fibré ouvert de* ε *:*

$$U_\xi = \{S \in \overline{\mathcal{M}_\mathcal{O}}(\varepsilon) \mid S(M) \subset \xi\}$$

$$\varphi_\xi : U_\xi \longrightarrow \mathcal{M}_\mathcal{O}(\xi)$$

forment un δ*-atlas sur* $\overline{\mathcal{M}_\mathcal{O}}(\varepsilon)$ *pour une structure de variété bimodelée qui vérifie (c). (d) est une conséquence immédiate du théorème.*

Corollaire 2 :

(Structures de variétés bimodelées sur les espaces de fonctions continues).

Soit M *une variété compacte de dimension* n.

X *une variété différentielle de dimension finie paracompacte.*

$\varepsilon_{M,X}$ *le fibré trivial* $(M \times X, M, p_1)$

Alors l'ensemble $\overline{\mathcal{M}_\mathcal{O}}_X(M) \subset \mathcal{C}^0_X(M)$ *formé des applications* $u : M \longrightarrow X$ *telles que* $m \rightsquigarrow (m, u(m))$ *soit une section* $\in \overline{\mathcal{M}_\mathcal{O}}(\varepsilon_{MX})$ *peut être muni d'une structure de variété bimodelée dans* $\mathcal{O}$ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$.

Exemples :

On reprend les exemples du n° 1.

La construction que nous venons de faire s'applique si $\mathcal{O}$ *est l'un des foncteurs des exemples 1 et 2.*

Cette construction s'applique aussi dans les conditions des exemples 4 et 5 si $\frac{n}{p} - k < 0$. *Dans le cas de l'exemple 4, on peut utiliser le foncteur* $\mathcal{M}_\mathcal{O} = L^q_h$ *avec* $h - \frac{n}{q} < 0$, *dans le cas de l'exemple 5 on utilise* $\mathcal{M}_\mathcal{O} = L^q$. *Dans la théorie classique (cf. PALAIS) de tels espaces de Sobolev* L^q_h *et les espaces* L^q *ne peuvent être des modèles de variétés de sections ; ici, par contre de tels espaces peuvent être utilisés comme seconds modèles de variétés bimodelées, par exemple dans les conditions du §4.*

CHAPITRE II.

§1. INTRODUCTION

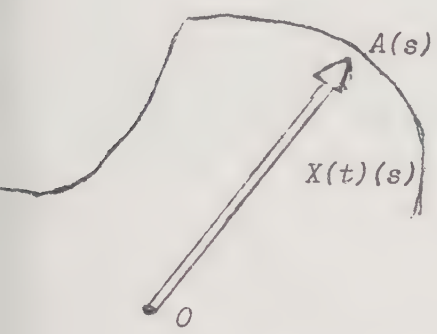
n°1. Définition des fils

Soit $\mathcal{E}^\bullet$ l'espace affine construit sur l'espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3, un fil est un milieu continu déformable dont les configurations géométriques peuvent être définies par la donnée :

. de sa longueur L dans un état de référence.

. d'un arc assez régulier dans $\mathcal{E}^\bullet$ (à chaque instant).

Si $O \in \mathcal{E}$ est une origine fixée une fois pour toutes le fil peut-être représenté à l'instant t par l'ensemble des points $A(s) \in \mathcal{E}^\circ$ tels que



$$\overrightarrow{OA}(s) = X(t)(s) \qquad s \in (0,L)$$

s étant l'abscisse curviligne du point matériel A dans la configuration et $X(t)$ une application de $I = (0,L)$ dans $\mathcal{E}$. (*)

Pour étudier la mécanique des fils, nous allons d'abord définir et étudier les espaces des configurations de ces milieux continus. Par exemple l'espace des configurations d'un fil inextensible et sans raideur sera une partie Ω d'un espace fonctionnel $\mathbb{E}$

. $\mathbb{E}$ sera caractérisé par des conditions de régularité imposées à l'application $X : I \longrightarrow \mathcal{E}$ et portant sur la dérivée X'.

. Ω sera caractérisé par des conditions de liaison qui peuvent être de deux types :

a) Liaison interne (inextensibilité).

b) Liaison externe (des points de l'arc représentant le fil peuvent être astreints à rester fixes).

et nous munirons Ω d'une structure de variété bimodelée dans la catégorie $\boxed{+}$ de δ-couples d'espaces de Banach construite à partir de la catégorie $\boxed{1}$ des espaces de Banach et de la catégorie $\boxed{2}$ des espaces de Banach réflexifs.

(*) Autrement dit on adopte une représentation lagrangienne du milieu continu étudié.

On étudie aussi les espaces des configurations d'autres types de fils, les fils extensibles et sans raideur (§3) et, très brièvement, ceux des fils doués de raideur, fils pour lesquels les conditions de régularité imposées à l'application X portent sur des dérivées d'ordre > 1 (§5).

Tous ces espaces seront munis de structures de variétés bimodelées dans $\boxed{+}$ *et l'existence de ces structures permet, par application de la théorie exposée au chapitre I §4, un développement de la dynamique analytique beaucoup plus complet que celui qui est possible avec les seules structures de variétés de Banach sous-jacentes.*

Remarquons que ce que nous appelons ici fils doués de raideur - la raideur traduisant l'aptitude d'un milieu continu curviligne à résister à la flexion - peut représenter certains milieux continus rencontrés en théorie des structures. Cependant nous donnerons en détail au chapitre IV une application du chapitre I §4 à des milieux continus curvilignes en adoptant une description plus fine que celle utilisée dans ce chapitre II et qui est analogue à celle qui est utilisée en théorie des structures.

n°2. Notations.

Nous poserons dans toute la suite .

I = intervalle $(0,L)$ de $\mathbb{R}$ $(L > 0)$.

$\mathcal{E}$ = espace hilbertien sur $\mathbb{R}$ dont le produit scalaire et la norme associée sont notés $<.'.>$ et $|.|$.

$\mathcal{E}^o$ = espace affine construit sur $\mathcal{E}$.

p, q, r nombres $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $1 \leq p, q, r \leq +\infty$

$\mathbb{E}^p$ = espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) formé des applications continues $X : I \longrightarrow \mathcal{E}$ telles que X' (dérivée au sens des distributions) $\in L^p_{\mathcal{E}}(I)$.

$\mathbb{E} = \mathbb{E}^\infty$

j = injection naturelle de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}^p$ (lorsque p sera fixé).

Si $Y \in L^p_{\mathcal{E}}(I)$ on notera $\int_0 Y$ la primitive de Y nulle au point 0.
Si $X \in \mathbb{E}^p$ on a $X = X(0) + \int_0 X'$ (c'est-à-dire $X(s) = X(0) + \int_0^s X'$)
$\mathbb{E}^p$ muni de la norme telle que

$$||X||_p = \mathrm{Max}\,(|X(0)|, N_p(X')),$$

$\mathbb{E}$ muni de la norme telle que

$$||X|| = \mathrm{Max}\,(|X(0)|, N_\infty(X')),$$

sont des espaces de Banach (on désigne par N_p la norme de $L^p_{\mathcal{E}}(I)$)

$\mathbb{S} = L^\infty_{\mathbb{R}}(I)$ est une algèbre de Banach (pour la norme N_∞) dont l'élément unité est $e : s \rightsquigarrow 1$.

$\mathbb{P}$ = cône convexe fermé de $\mathbb{S}$ formé des éléments positifs (classes des applications ≥ 0)

$\leq$ relation d'ordre dans $\mathbb{S}$ $u \leq v \Longleftrightarrow v-u \in \mathbb{P}$.

De plus on définit les applications

$B_p : \mathbb{E} \times \mathbb{E}^p \longrightarrow \mathbb{L}^p(I)$ application bilinéaire continue définie par $B_p(X,Y) = <X'|Y'>$ ("classe d'applications de $s \rightsquigarrow <X'(s)|Y'(s)>$").

$B = B_\infty : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{L}^\infty(I) = \mathbb{S}$

$\mathcal{Q} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{S}$ application quadratique associée à B.

B_p et B sont des applications bilinéaires continues (pour les topologies définies plus haut).

n°3. Caractérisation des éléments de $\overset{o}{\mathbb{P}}$ et des éléments inversibles de $\mathcal{S}$

Pour interpréter les définitions posées au n°4, il pourra être utile de se référer aux deux lemmes que voici

Lemme 1 :

Soit $u \in \mathcal{S}$, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $u \in \overset{o}{\mathbb{P}}$

(b) il existe k *(réel)* > 0 *tel que* $u \geqslant ke$.

Lemme 2 :

Soit $u \in \mathcal{S}$, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $|u| \in \overset{o}{\mathbb{P}}$ *(où "*$|u|$ *est la classe d'applications de* $s \rightsquigarrow |u(s)|$*").*

(b) u *est inversible dans* $\mathcal{S}$

Démonstration du lemme 1 :

Si $u \in \overset{o}{\mathbb{P}}$ *il existe* $k > 0$ *tel que* $|v| \leqslant k \Longrightarrow u + v \in \mathbb{P}$ *comme* $|-ke| = k$ *on a donc* $u - ke \in \mathbb{P}$ *donc* $u \geqslant ke$. *Inversement si* $u \geqslant ke$ $(k > 0)$ $|v| \leqslant k \Longrightarrow u + v \in \mathbb{P}$, *donc* $u \in \overset{o}{\mathbb{P}}$.

Démonstration du lemme 2 :

Si $|u| \in \overset{o}{\mathbb{P}}$, *d'après le lemme 1 il existe* $k > 0$ *tel que* $|u| \geqslant ke$ *et l'on peut définir la classe* $\frac{1}{u}$ *qui est l'inverse de* u *dans* $\mathcal{S}$. *Réciproquement* $u \in \mathcal{S}$ *et* $\frac{1}{u} \in \mathcal{S}$ *on a* $|u| \geqslant \frac{1}{M} e$ *avec* $M = N_\infty \left(\frac{1}{u}\right)$ *donc* $|u| \in \overset{o}{\mathbb{P}}$.

n°4. Les espaces des configurations des fils sans raideur

Définition 1 :

L'espace des configurations d'un fil inextensible sans raideur est l'ensemble Ω *formé des* $X \in \mathbb{E}$ *tels que* $\hat{Q}(X) = e$

La condition $\hat{Q}(X) = e$, *qui traduit l'inextensibilité est une liaison interne imposée au milieu continu curviligne considéré.*

Définition 2 :

L'espace des configurations d'un fil extensible sans raideur est l'ensemble Λ *formé des* $X \in \mathbb{E}$ *tels que* $\hat{Q}(X)$ *soit inversible dans l'algèbre* $\mathcal{S}$. *Sous une autre forme* $X \in \Lambda \Longleftrightarrow \hat{Q}(X) \in \overset{o}{\mathbb{P}}$

$\Longleftrightarrow \exists k > 0$ *tel que* $\hat{Q}(X) \geqslant ke$

La définition 2 entraine que la mesure de Lebesgue ds sur $(0,L)$ *("longueur de référence") et la mesure* $\hat{Q}(X)^{1/2}\,ds$ *("longueur dans l'état déformé représenté par la configuration X") sont équivalente. Les définitions 1 et 2 sont des cas particuliers de la définition suivante :*

Définition 3 :

Soient η *une partie mesurable de* I *et* $\mathbb{L}_\eta$ *la partie de* $\mathbb{S}$ *formée des classes d'applications nulles sur* $I - \eta$
L'espace des configurations d'un fil partiellement extensible et sans raideur est l'ensemble Λ_η *formé des* $X \in \mathbb{E}$ *tels que*

- $\hat{Q}(X)$ *est inversible dans* $\mathbb{S}$.
- $\hat{Q}(X) \in e + \mathbb{L}_\eta$.

Le cas de la définition 1 correspond à $\eta = \emptyset$ *celui de la définition 2 à* $\eta = I$; η *représente la région où le fil est extensible.*

Nous allons maintenant montrer que Ω, Λ, Λ_η *peuvent être munis de structures de variété bimodelées de classe* $\mathcal{C}^\infty$. *Avant d'examiner le cas général de* Λ_η, *nous traiterons séparément celui de* Ω *qui a une importance particulière.*

§2. LES STRUCTURES DE VARIETES BIMODELEES SUR Ω

n°1. Décomposition de $\mathbb{E}^p$ en une somme directe remarquable.

Définition 4 :

Pour $X \in \Lambda$ posons

$\mathbb{F}^p_X$ = sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}^p$ formé des x tels que $B_p(X,x) = 0$

$\mathbb{G}^p_X$ = sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}^p$ formé des y tels que $y(0) = 0$ et $\exists u \in \mathbb{L}^p(I)$ tel que $y' = uX'$.

En particulier pour $p = +\infty$

$\mathbb{F}_X$ = sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ formé des x tels que $B(X,x)=0$

$\mathbb{G}_X$ = sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ formé des y tels que $y(0) = 0$ et $\exists u \in \mathbb{L}^\infty(I) = \mathbb{S}$ tel que $y' = uX'$.

Proposition 1 :

Pour $X_o \in \Lambda$, l'espace vectoriel topologique $\mathbb{E}^p$ est somme directe topologique de $\mathbb{F}^p_{X_o}$ et $\mathbb{G}^p_{X_o}$.

En effet, soit $X \in \mathbb{E}^p$, on peut déterminer $u \in L^p(I)$ et $U \in L^p_\xi(I)$ tels que

$$X' = U + u X'_o \quad \text{et} \quad \langle X'_o | U \rangle = 0$$

(ce qui revient, presque partout sur I, à décomposer $X'(s)$ suivant la direction de $X'_o(s) \neq 0$ et le sous-espace de ξ orthogonal à $X'_o(s)$; on a

$$u(s) = \frac{\langle X'_o(s) | X'(s) \rangle}{\langle X'_o(s) | X'_o(s) \rangle} \quad \text{soit} \quad u = \frac{B_p(X_o, X)}{Q_{\wedge}(X_o)} \in L^p(I)$$

$$U(s) = X'(s) - u(s)\, X'_o(s) \qquad U \in L^p_\xi(I)$$

donc

$$X = X(0) + \int_o X' = X(0) + \int_o U + \int_o uX'$$

en posant

$$x = X(0) + \int_o U \quad , \quad y = \int_o uX'$$

on a $x \in \mathbb{F}^p_{X_o}$, $y \in \mathbb{G}^p_{X_o}$ et $X^o = x+y$. Par suite $\mathbb{E} = \mathbb{F}^p_{X_o} + \mathbb{G}^p_{X_o}$

De plus si $X \in \mathbb{F}^p_{X_o} \cap \mathbb{G}^p_{X_o}$: $B_p(X_o,X) = 0$, $X(0) = 0$, $X' = uX'_o$ d'où

$B_p(X_o,X) = u\ \underset{\wedge}{Q}(X_o) = 0$, comme $X_o \in \Lambda$, $\underset{\wedge}{Q}(X_o)$ est inversible dans $\mathbb{L}^\infty(I)$ donc $u = 0$ et $X = X(0) + \int_o X' = 0$ ce qui établit $\mathbb{F}^p_{X_o} \cap \mathbb{G}^p_{X_o} = \{0\}$ et

$$\mathbb{E}^p = \mathbb{F}^p_{X_o} \oplus \mathbb{G}^p_{X_o}$$

Le projecteur $\pi_{\mathbb{G}^p}$ de $\mathbb{E}^p$ sur $\mathbb{G}^p_{X_o}$ parallèlement à $\mathbb{F}^p_{X_o}$ est défini par

$$\pi_{\mathbb{G}^p}(X) = \int_o \frac{B_p(X_o,X)}{\underset{\wedge}{Q}(X_o)}\, X'_o$$

ce qui est une application linéaire continue :

$||\pi_{\mathbb{G}^p}(X)||_p \leq ||X||_p$ pour $1 \leq p < +\infty$, $||\pi_G(X)|| \leq Max\ (1,L)||X||$ $p=+\infty$.

Corollaire :

$\mathbb{F}^p_{X_o}$ et $\mathbb{G}^p_{X_o}$, munis des topologies induites par celle de $\mathbb{E}^p$ sont fermés dans $\mathbb{E}^p$ et sont des espaces de Banach.

Ce qui précède suggère de définir l'application

$$\alpha^p_{X_o} : \mathbb{L}^p(I) \longrightarrow \mathbb{G}^p_{X_o} : u \rightsquigarrow \int_o u\, X'_o$$

Alors, pour $X_o \in \Lambda$ l'application $\alpha^p_{X_o}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques. En effet $\alpha^p_{X_o}$ est bijective et

$$(\alpha^p_{X_o})^{-1}(y) = \frac{B_p(X_o,y)}{\underset{\wedge}{Q}(X_o)}$$

les continuités de $\alpha^p_{X_o}$ et $(\alpha^p_{X_o})^{-1}$ sont immédiates :

$$||\alpha^p_{X_o}(u)||_p \leq N_\infty(X'_o)\, N_p(u)$$

$$N_p(\alpha^p_{X_o})^{-1}(y) \leq N_\infty\left(\frac{X'_o}{\underset{\wedge}{Q}(X_o)}\right) ||y||_p$$

Dans ces conditions les projections associés à la décomposition de $\mathbb{E}^p$ en la somme directe $\mathbb{F}^p_{X_o} \oplus \mathbb{G}^p_{X_o}$ s'expriment par

$$\pi_{\mathbb{F}^p_{X_o}}(X) = X - \alpha^p_{X_o}\left(\frac{B_p(X_o,X)}{\underset{\wedge}{Q}(X_o)}\right), \quad \pi_{\mathbb{G}^p_{X_o}}(X) = \alpha^p_{X_o}\left(\frac{B_p(X_o,X)}{\underset{\wedge}{Q}(X_o)}\right)$$

En particulier si $X_o \in \Omega$ et $p = +\infty$

$$\pi_{\mathbb{F}_{X_o}}(X) = X - \alpha_{X_o}(B(X_o,X)), \quad \pi_{\mathbb{G}_{X_o}} = \alpha_{X_o}(B(X_o,X))$$

Proposition 2 :

Pour $X_o \in \Lambda$ *l'application de* $\mathbb{F}^p_{X_o} \times \mathbb{L}^p(I)$ *dans* $\mathbb{E}^p$ *définie par :*

$$(x,u) \rightsquigarrow X = X_o + x + \alpha^p_{X_o}(u)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.
En particulier : Pour $X_o \in \Lambda$ *l'application de* $\mathbb{F}_{X_o} \times \mathbb{L}^\infty(I)$ *dans* $\mathbb{E}$ *définie par :*

$$(x,u) \rightsquigarrow X = X_o + x + \alpha_{X_o}(u)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.
Il suffit de considérer la suite d'applications

$$X \rightsquigarrow X - X_o = Z \rightsquigarrow (\pi_{\mathbb{F}^p}(Z), \pi_{\mathbb{G}^p}(Z)) = (x,y) \rightsquigarrow (x, (\alpha^p_{X_o})^{-1}(y)) = (x,u)$$

où chaque application est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques d'après ce qui précéde.

Remarques :

On établit aisément les formules suivantes

1°) pour $X_o \in \Lambda$: $\pi_{\mathbb{F}_{X_o}}(X_o) = X_o(0)$ (*)

$$X_o = X_o(0) + \alpha_{X_o}(e)$$

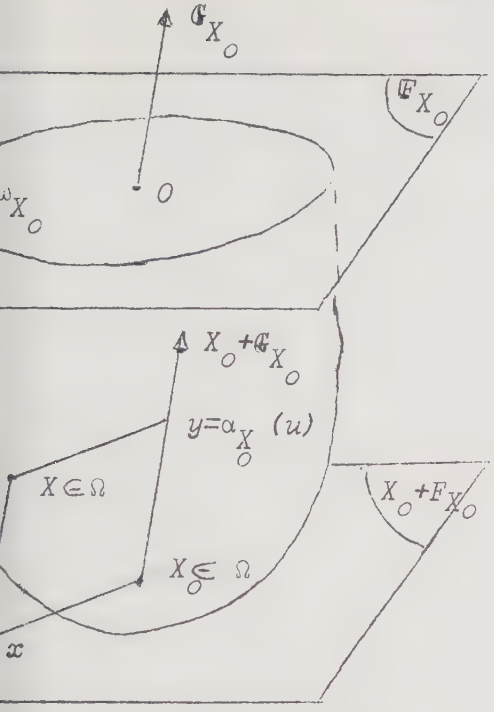
2°) Si $x \in \mathbb{F}_{X_o}$, $y = \alpha_{X_o}(u)$, $z = \alpha_{X_o}(v)$ $u,v \in L^\infty(I) = \mathcal{E}$

$$B(x,y) = 0$$
$$B(y,z) = u\, v\, \underset{\sim}{Q}(X_o)$$
$$\underset{\sim}{Q}(y) = u^2\, \underset{\sim}{Q}(X_o)$$

n°2. Structures de variétés bimodelées de Ω

Nous allons d'abord construire les cartes qui, en définitive, formeront un atlas de la structure de variété de Banach sous-jacente à la variété bimodelée Ω.

(*) *Application constante* $S \rightsquigarrow X_o(0)$



Soit $X_o \in \Omega$, *l'isomorphisme mis en évidence dans la proposition 2 (cas* $p = +\infty$*) suggère de chercher la relation existant entre* $x \in \mathbb{F}_{X_o}$ *et* $u \in \mathbb{S}$ *pour que*

(1) $X = X_o + x + \alpha_{X_o}(u) \in \Omega$.

compte tenu des remarques de la fin du n°1 et de la définition 1 cela équivaut à

$$\underset{\wedge}{Q}\,(x + \alpha_{X_o}(e+u)) = e$$

Soit encore :

$$\underset{\wedge}{Q}(x) + 2\,B(x, \alpha_{X_o}(e+u)) + (e+u)^2\ \underset{\wedge}{Q}(X_o) = e \quad \text{ou bien}$$

(*) $$(e+u)^2 = e - \underset{\wedge}{Q}\,(x)$$

Or la relation (*), considérée comme une équation en u, x *étant un paramètre, admet des solutions dans* $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *si et seulement si* $e - \underset{\wedge}{Q}(x) \in \mathbb{P}$ *et ces solutions sont de la forme*

(**) $$u_\varepsilon\ (x) = -e + \varepsilon\,(e - \underset{\wedge}{Q}\,(x))^{1/2} \quad \text{avec} \quad \varepsilon^2 = e$$

(ε *est donc une application de* I *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $\varepsilon(s) = \pm 1$ $s \in I$)

la condition $e - \underset{\wedge}{Q}\ (x) \in \mathbb{P}$ *est donc nécessairement vérifiée si* $X \in \Omega$ *et* $x = \varphi_{\mathbb{F}_{X_o}}(X)$; *par conséquent si* $x \in \mathbb{F}_{X_o}$, $u \in \mathbb{L}^\infty(I)$ *les propriétés*

(1) $X = X_o + x + \alpha_{X_o}\ (u) \in \Omega$

(2) $e - \underset{\wedge}{Q}\ (x) \in \mathbb{P}$ *et* $\exists \varepsilon$ *tel que* $\varepsilon^2 = e$,
$u = u_\varepsilon(x) \equiv -e + \varepsilon\,(e - \underset{\wedge}{Q}\ (x))^{1/2}$

sont équivalentes, de plus, dans ces conditions :

(3) $B(X_o, X) = \varepsilon\,(e - \underset{\wedge}{Q}(x))^{1/2}$ (*et* $\varepsilon = Sgn\ B(X_o, X)$)

La propriété (3) s'établit en remarquant que dans les conditions de (1)

$$B(X_o, X) = B(X_o, x + \alpha_{X_o}\ (e+u)) = e+u$$

Dans les conditions de (2), x *ne décrit pas un ouvert de* $\mathbb{F}_{X_o}$; *pour définir des cartes de* Ω *appliquant une partie de* Ω *sur un ouvert de* $\mathbb{F}_{X_o}$ *nous utiliserons le résultat suivant :*

Soit $X_o \in \Omega$, *si* $X = X_o + x + \alpha_{X_o}(u_\varepsilon(x))$, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(4) $B(X_o, X)$ *est inversible dans* $\mathbb{S}$

(5) $\varepsilon B(X_o, X) \in \overset{\circ}{\mathbb{P}}$

(6) $e - \underset{\wedge}{Q}(x) \in \overset{c}{\mathbb{P}}$

et chacune des ces propriétés entraine que

(7) $\varepsilon \in L^\infty(I)$

Montrons que (4) $\Longrightarrow$ (5) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (4) *et* (6) $\Longrightarrow$ (7)

- *Si* $B(X_o, X)$ *est inversible dans* $\mathbb{S}$ *le lemme 2 et (3) montrent que* $\mathrm{Sgn}\, B(X_o, X) \times B(X_o, X) = |B(X_o, X)| = \varepsilon B(X_o, X) \in \overset{\circ}{\mathbb{P}}$
- *Si* $\varepsilon B(X_o, X) \in \overset{\circ}{\mathbb{P}}$ (3) *montre que* $(e - \underset{\wedge}{Q}(x))^{1}/2 \in \overset{\circ}{\mathbb{P}}$ *d'où* $e - \underset{\wedge}{Q}(x) \in \overset{\circ}{\mathbb{P}}$ *puisque* $\overset{\circ}{\mathbb{P}}$ *est multiplicativement stable.*
- *Si* $e - \underset{\wedge}{Q}(x) \in \overset{\circ}{\mathbb{P}}$, $(e - \underset{\wedge}{Q}(x))^{1/2}$ *est inversible dans* $\mathbb{S}$ *ainsi que* $B(X_o, X)$ *d'après (3), de plus* $\varepsilon = B(X_o, X)\,(e - \underset{\wedge}{Q}(x))^{-\frac{1}{2}} \in \mathbb{L}^\infty(I)$

Ces équivalences suggérent d'introduire les ensembles

$$\omega_{X_o} = \{x \in \mathbb{F}_{X_o} \mid e - \underset{\wedge}{Q}(x) \in \overset{c}{\mathbb{P}}\}$$

$$\Omega^\varepsilon_{X_o} = \{X \in \Omega \mid \varepsilon B(X_o, X) \in \overset{c}{\mathbb{P}}\}$$

où $\varepsilon \in \mathbb{L}^\infty(I)$ *est fixé avec* $\varepsilon^2 = e$, *et les applications*

(8) $\xi^\varepsilon_{X_o} : \omega_{X_o} \longrightarrow \Omega^\varepsilon_{X_o} : x \rightsquigarrow X_o + x + \alpha_{X_o}(u_\varepsilon(x)) = \xi^\varepsilon_{X_o}(x)$

ω_{X_o}, *image réciproque de l'ouvert* $\overset{\circ}{\mathbb{P}}$ *de* $\mathbb{L}^\infty(I)$ *par l'application continue* $x \rightsquigarrow e - \underset{\wedge}{Q}(x)$ *est un ouvert de* $\mathbb{F}_{X_o}$.

$\Omega^\varepsilon_{X_o}$, *image réciproque de l'ouvert* $\overset{\circ}{\mathbb{P}}$ *par l'application continue* $\varepsilon B(X_o, \cdot)$ *de* Ω, *muni de la topologie induite par* $\mathbb{E}$, *dans* $L^\infty(I)$ *est un ouvert du sous-espace topologique* Ω *de* E.

Proposition 3 :

$\xi^\varepsilon_{X_o}$ *est un homomorphisme de* ω_{X_o} *sur* $\Omega^\varepsilon_{X_o}$

$(\xi^\varepsilon_{X_o})^{-1}$ *est la restriction de* $\Psi_F - X_o(0)$ *à* $\Omega^\varepsilon_{X_o}$ (*)

(Ω *est muni de la topologie induite par* $\mathbb{E}$)

(*) $\Psi_F - X_o(0) : X \rightsquigarrow \Psi_F(X) - X_o(0)$ = *classe de* $s \rightsquigarrow \Psi_F(X)(s) - X_o(0)$

Démonstration :

d'aprés (8) on a $\P_{\mathbb{F}} \circ \xi^{\varepsilon}_{X_o} = id_{\omega_{X_o}} + \P_{\mathbb{F}}(X_o) = id_{\omega_{X_o}} + X_o(0)$

donc $(\P_{\mathbb{F}} - X_o(0)) \circ \xi^{\varepsilon}_{X_o} = id_{\omega_{X_o}}$. $\xi^{\varepsilon}_{X_o}$ *est donc injective et, par construction , surjective : C'est une bijection. Il sera établi plus loin que* $\xi^{\varepsilon}_{X_o}$ *est infiniment différentiable donc continue et il résulte de la proposition 1 et de ce qui précéde que* $(\xi^{\varepsilon}_{X_o})^{-1}$ *est continue. La proposition 3 est établie.*

Corollaire :

Posons $\xi_{X_o} = \xi^{e}_{X_o}$, $\Omega_{X_o} = \Omega^{e}_{X_o}$ $(\varepsilon = e)$, *dans ces conditions* ξ_{X_o} *est un homéomorphisme de* ω_{X_o} *sur le voisinage ouvert* Ω_{X_o} *de* X_o *dans* Ω.

$p \in [1, +\infty)$ *étant fixé on pose maintenant*

$$\Delta = (\mathbb{E}, \mathbb{E}^p, j) \quad , \quad \Delta_{X_o} = (\mathbb{F}_{X_o}, \mathbb{F}^p_{X_o}, j_{X_o})$$

où $j : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}^p$ *est l'injection naturelle,* j_{X_o} *est la restriction de* j *à* $\mathbb{F}_{X_o}$. Δ *et* Δ_{X_o} *sont des* δ*-couples stricts d'espaces de Banach.*

Proposition 4 :

L'application $\xi^{\varepsilon}_{X_o} : \omega_{X_o} \longrightarrow \mathbb{E}$ *est infiniment différentiable et bidifférentiable de classe* $\mathcal{C}^{\infty}$ *(pour les* δ*-couples* Δ_{X_o} *et* Δ*)*

Démonstration :

Montrons d'abord que $\xi^{\varepsilon}_{X_o}$ *est infiniment différentiable de* ω_{X_o} *dans* $\mathbb{E}$, $\xi^{\varepsilon}_{X_o}$ *peut s'écrire sous la forme*

$$\xi^{\varepsilon}_{X_o}(x) = X_o(0) + x + \alpha_{X_o} \circ \varepsilon g \circ \hat{Q}(x)$$

où g *est l'application, définie sur l'ouvert de* $L^{\infty}(I)$ *formé des* u *tels que* $c\text{-}u \in \mathbb{P}^{\circ}$, *par*

$$g(u) = (e-u)^{1/2} \quad , \quad (\varepsilon g)(u) = \varepsilon . g(u).$$

g *est infiniment différentiable et*

$$g'(u)(u_1) = -\frac{1}{2}\ (e-u)^{-\frac{1}{2}}\ u_1$$

$$g^{(p)}(u)(u_1, \ldots, u_p) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots (\frac{1}{2} - p)\ (e-u)^{\frac{1}{2} - p} \cdot u_1 \cdot \ldots u_p$$

$(p \geqslant 2)$

$\hat{O}$ *est infiniment différentiable et comme* $\alpha_{X_o} \in \mathcal{L}(\mathbb{S}, \mathbb{F}_{X_o})$

$$\xi^{\varepsilon}_{X_o}{}' = id_{\mathbb{F}_{X_o}} + \alpha_{X_o} \circ (\varepsilon g \circ \hat{O})'$$

$$\xi^{\varepsilon}_{X_o}{}^{(p)} = \alpha_{X_o} \circ (\varepsilon\, g \circ \hat{O})^{(p)}$$

Des calculs sans difficulté donnent en particulier

$$\xi^{\varepsilon}_{X_o}{}'(x)\,(x_1) = x_1 - \int_o \frac{\varepsilon B(x,x_1)}{(e-\hat{O}(x))^{1/2}} \qquad X'_o = x_1 - \alpha_{X_o}\left(\frac{\varepsilon B(x,x_1)}{(e-O(x))^{1/2}}\right)$$

$$\xi^{\varepsilon}_{X_o}{}''(x)\,(x_1)\,(x_2) = -\int_o \varepsilon \left[\frac{B(x,x_1).B(x,x_2)}{(e-\hat{O}(x))^{3/2}} + \frac{B(x_1,x_2)}{(e-\hat{O}(x))^{1/2}}\right] X'_o$$

Si l'on définit $\xi^{\varepsilon^o}_{X_o} \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^p_{X_o}, \mathbb{F}^p)$ *par*

$$\xi^{\varepsilon^o}_{X_o}(x)\,(x_1) = x_1 - \alpha^p_{X_o}\left(\frac{\varepsilon\, B_p(x,x_1)}{(e-\hat{O}(x))^{1/2}}\right)$$

alors

$$\xi^{\varepsilon^o}_{X_o}(x) \circ j_{X_o} = j \circ \xi'_{X_o}(x)$$

et l'application $x \rightsquigarrow \xi^{\varepsilon}_{X_o}(x)$ *est infiniment différentiable de* ω_{X_o} *dans* $(\mathbb{F}^p_{X_o}, \mathbb{F}^p)$; *par exemple*

$$\xi^{\varepsilon^o}_{X_o}{}'(x)\,(x_1)\,(x_2) = -\int_o \varepsilon \left[\frac{B_p(x,x_1)\; B(x,x_2)}{(e-\hat{O}(x))^{3/2}} + \frac{B_p(x_2,x_1)}{(e-\hat{O}(x))^{1/2}}\right] X'_o$$

En particulier pour $x = 0$

$$\xi^{\varepsilon}_{X_o}{}'(0) = id_{\mathbb{F}_{X_o}}, \qquad \xi^{\varepsilon^o}_{X_o}(0) = id_{\mathbb{F}^p_{X_o}}$$

$$\xi^{\varepsilon}_{X_o}{}''(0) = -\alpha_{X_o} \circ \varepsilon\, B, \qquad \xi^{\varepsilon^o}_{X_o}(0) = -\alpha^p_{X_o} \circ \varepsilon\, B_p$$

$$\xi^{\varepsilon}_{X_o}{}'''(0) = 0, \qquad \xi^{\varepsilon^o}_{X_o}{}''(0) = 0$$

$$\xi^{\varepsilon}_{X_o}{}''''(0)(x_1)(x_2)(x_4) = -\alpha_{X_o}\,(\varepsilon(B(x_1,x_2).B(x_3,x_4)+B(x_2,x_3).B(x_1,x_4)+ \\ +B(x_1,x_3).B(x_2,x_4))$$

de δ-atlas $\mathcal{A}^{(p)}$ $(1 < p < +\infty)$

Soit $\{X_\alpha \mid \alpha \in]\}$ une famille de points de Ω telle que les ensembles $\Omega_\alpha = \Omega^e_{X_\alpha}$ recouvrent Ω, posons

$$\mathcal{A}^{(p)} = \{(\Omega_\alpha, \zeta_\alpha, \Delta_\alpha) \mid \alpha \in]\}$$

avec $\zeta_\alpha = \xi_\alpha^{-1}$ où $\xi_\alpha = \xi^e_{X_\alpha} : \omega_\alpha \longrightarrow \Omega_\alpha$, $\omega_\alpha = \omega_{X_\alpha}$, $\Delta_\alpha = \Delta_{X_\alpha}$,

(le nombre p qui intervient dans Δ_α est supposé fixé). $\mathcal{A}^{(p)}$ est un δ-atlas qui définit sur l'ensemble Ω une structure de variété bimodelée dans la catégorie $\boxed{+1}$ de δ-couples telles que $\boxed{1}$ (resp : $\boxed{2}$) - catégorie des espaces de Banach (resp : de Banach réflexifs) (*).

Il suffit de vérifier que :

1°) Les ensembles Ω_α recouvrent Ω.

2°) Toute application ζ_α est une bijection de Ω_α sur un ouvert de F_α

3°) Pour tout couple α, β tel que $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta \neq \emptyset$, $\zeta_\alpha(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta)$ est ouvert dans F_α et l'application de transition

$$\zeta_\beta \circ \zeta_\alpha^{-1} : \zeta_\alpha(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta) \longrightarrow \zeta_\beta(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta)$$

est bidifférentiable et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Les 1°) et 2°) propriétés sont immédiates, pour vérifier la 3°) propriété remarquons que :

$$\zeta_\beta \circ \zeta_\alpha^{-1}(x) = (\eta_{\mathbb{F}_\beta} - X_\beta(0)) \circ \xi_\alpha(x)$$

et que l'application affine $\eta_{\mathbb{F}_\beta} - X_\beta(0)$ est bidifférentiable et de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $(\mathbb{E}, \mathbb{E}^p, j)$ dans $(\mathbb{F}_\beta, \mathbb{F}^p_\beta, j_\beta)$ avec

$$\eta'_{\mathbb{F}_\beta} = \eta_{\mathbb{F}_\beta}, \quad \eta^0_{\mathbb{F}^p_\beta} = \eta_{\mathbb{F}^p_\beta}$$

($\eta_{\mathbb{F}^p_\beta} \circ j = j_\beta \circ \eta_{\mathbb{F}_\beta}$). Par suite, d'aprés la proposition 4, l'application figurant dans le 3°), qui peut être considérée comme composée de deux applications bidifférentiables de classe $\mathcal{C}^\infty$ est aussi bidifférentiable et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Remarques :

1°) Si $1 \leqslant p < +\infty$ (le cas $p = +\infty$ n'aurait d'ailleurs pas d'intérêt) les espaces $\mathbb{F}^p_X$ sont réflexifs. Si $p = 2$ ce sont des espaces hilbertisables.

(*) *cf théorie des variétés bimodelées §2 - 1°) chap. I*

Remarques :

2°) *D'après les lemmes 1 et 2 les propriétés suivantes sont équivalentes*

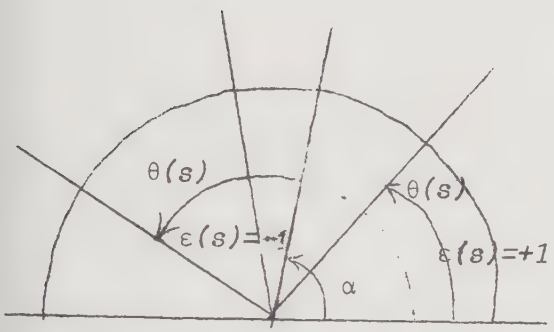
(a) $x \in \omega_{X_o}$

(b) $\exists k \in [0,1[$ *tel que* $\hat{O}(x) \leq k\varepsilon$

On déduit de la seconde propriété que ω_{X_o} *est un ouvert symétrique convexe donc connexe. Par suite* $\Omega^{\varepsilon}_{X_o}$ *, homéomorphe à* ω_{X_o} *(proposition 5) est connexe.*

D'après la définition de $\Omega^{\varepsilon}_{X_o}$

$$X \in \Omega^{\varepsilon}_{X_o} \iff \varepsilon\, B(X_o, X) \in \overset{\circ}{\mathbb{P}} \iff \exists k \in]0,1[\text{ tel que } \varepsilon\, B(X_o, X) \geq k\varepsilon$$

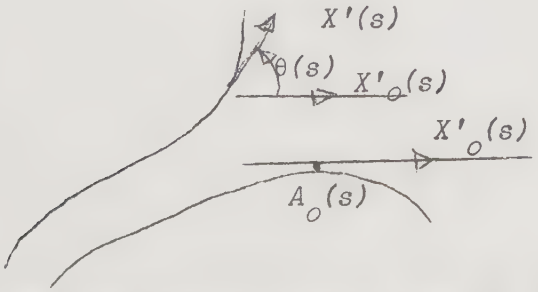


Considérons les arcs de ξ^* *d'équations* $\overrightarrow{OA_o}(s) = X_o(s)$ *et* $\overrightarrow{OA}(s) = X(s)$.
Soit $\theta(s) \in [0, \pi]$ *l'angle défini pour presque tout* $s \in I$ *, des tangentes à ces arcs en* $A_o(s)$ *et* $A(s)$ *on a*

$$\cos\theta = B(X_o, X)$$

Posons $k = \cos\alpha$, $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, *la relation* $X \in \Omega^{\varepsilon}_{X_o}$ *équivaut donc à*

$$\exists\, \alpha \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\text{ tel que } \begin{cases} \theta(s) \in [0, \alpha] & \text{si } \varepsilon(s) = +1 \\ \theta(s) \in [\pi - \alpha, \pi] & \text{si } \varepsilon(s) = -1 \end{cases}$$



Ceci fournit une caractérisation des arcs de ξ^* *correspondant aux fonctions* $X \in \Omega^{\varepsilon}_{X_o}$.

Expressions des différentielles des applications de transitions du δ-atlas $\mathcal{A}^p$.

Si X *et* $Y \in \Omega$ *avec* $\Omega_X \cap \Omega_Y \neq \emptyset$, *pour* $Z \in \Omega_X \cap \Omega_Y$ *on sait que si* $x_o = \zeta_X(Z)$, $x_1 = \zeta_Y(Z)$ *alors*

$$(\zeta_Y \circ \xi_X)'(x_o) : \mathbb{F}_X \longrightarrow \mathbb{F}_Y \quad \text{et} \quad (\zeta_X \circ \xi_Y)'(x_1) : \mathbb{F}_Y \longrightarrow \mathbb{F}_X$$

d'une part et :

$$(\zeta_Y \circ \xi_X)^\circ(x_o) : \mathbb{F}_X^p \longrightarrow \mathbb{F}_Y^p \quad \text{et} \quad (\zeta_X \circ \xi_Y)^\circ(x_1) : \mathbb{F}_Y^p \longrightarrow \mathbb{F}_X^p$$

d'autre part sont des couples d'isomorphismes d'e.v.t inverses l'un de l'autre, or, compte tenu des formules $(e - Q(x))^{1/2} = B(X,Z)$, $B(v,x_o) = B(v,Z)$ *si* $v \in \mathbb{F}_X$, $B_p(w, x_o) = B_p(w,Z)$ *si* $w \in \mathbb{F}_X^p$:

$$\xi_X'(x_o)(v) = v - \alpha_X\left(\frac{B(v,Z)}{B(X,Z)}\right) \quad \text{et} \quad \xi_X^\circ(x_o)(w) = w - \alpha_X^p\left(\frac{B_p(w,Z)}{B(X,Z)}\right)$$

d'où

$$\eta_{\mathbb{F}_Y} \circ \xi_X'(x_o)(v) = (\zeta_Y \circ \xi_X)'(x_o)(v) = v - \alpha_X\left(\frac{B(v,Z)}{B(X,Z)}\right) + \alpha_Y\left(\frac{B(v,Z)}{B(X,Z)} B(X,Y) - B(v,Y)\right)$$

$$\eta_{\mathbb{F}_Y^p} \circ \xi_X^\circ(x_o)(w) = (\zeta_Y \circ \xi_X)^\circ(x_o)(w) = w - \alpha_X^p\left(\frac{B_p(w,Z)}{B(X,Z)}\right) + \alpha_Y^p\left(\frac{B(w,Z)}{B(X,Z)} B(X,Y) - B_p(w,Y)\right)$$

$$\eta_{\mathbb{F}_X} \circ \xi_Y'(x_1)(v) = v - \alpha_Y\left(\frac{B(v,Z)}{B(Y,Z)}\right) + \alpha_X\left(\frac{B(v,Z)}{B(Y,Z)} B(X,Y) - B(v,X)\right) \quad v \in \mathbb{F}_Y$$

$$\eta_{\mathbb{F}_X^p} \circ \xi_Y^\circ(x_1)(w) = w - \alpha_Y^p\left(\frac{B_p(w,Z)}{B(Y,Z)}\right) + \alpha_X^p\left(\frac{B_p(w,Z)}{B(Y,Z)} B(X,Y) - B_p(w,X)\right) \quad w \in \mathbb{F}_X^p$$

En particulier, si $Y = Z$ *on obtient la proposition suivante :*

Proposition 5 :

Si $X \in \Omega$, $Y \in \Omega_X$

(a) les applications

$$v \in \mathbb{F}_X \rightsquigarrow \xi_X'(\zeta_X(Y))(v) = v - \alpha_X\left(\frac{B(v,Y)}{B(X,Y)}\right) \in \mathbb{F}_Y$$

$$w \in \mathbb{F}_X^p \rightsquigarrow \xi_X^\circ(\zeta_X(Y))(w) = w - \alpha_X^p\left(\frac{B_p(w,Y)}{B(X,Y)}\right) \in \mathbb{F}_Y^p$$

sont des isomorphismes d'e.v.t. dont les inverses sont les restrictions à $\mathbb{F}_Y$ *et* $\mathbb{F}_Y^p$ *de* $\eta_{\mathbb{F}_X}$ *et* $\eta_{\mathbb{F}_X^p}$.

(b) La restriction à $\mathbb{G}_X$ *(resp :* $\mathbb{G}^p_X$*) de* $\mathcal{H}_{\mathbb{G}_Y}$ *(resp :* $\mathcal{H}_{\mathbb{G}^p_Y}$*) est un isomorphisme d'e.v.t.*

Pour établir (b) on remarque que la restriction à $\mathbb{G}_X$ *(resp :* $\mathbb{G}^p_X$*) de* $\mathcal{H}_{\mathbb{G}_Y}$ *(resp :* $\mathcal{H}_{\mathbb{G}^p_Y}$*) s'écrit* $\alpha_Y \circ \varphi \circ \alpha_X^{-1}$ *(resp :* $\alpha^p_Y \circ \varphi_p \circ (\alpha^p_Y)^{-1}$*) où* φ *(resp :* φ_p*) :* $u \rightsquigarrow uB(X,Y)$ *est un automorphisme de* $L^\infty(I)$ *(resp :* $L^p(I)$*) pour la structure d'e.v.t. puisque* $B(X,Y)$ *est inversible dans* $L^\infty(I)$ *.*

n°3. Le δ-fibré tangent à Ω

La variété bimodelée Ω *est munie de* δ*-atlas*

$$\mathcal{A}^{(p)} = \{(\Omega_\alpha, \zeta_\alpha, \Delta_\alpha) \mid \alpha \in \Omega\} \qquad (p \in]1, +\infty[\text{ fixé})$$

Considérons les deux ensembles

$$\mathcal{V} = \{(X,V) \mid X \in \Omega\ ,\ V \in F_X\},\ \mathcal{W} = \{(X,W) \mid X \in \Omega,\ W \in \mathbb{F}^p_X\}$$

et les applications

$$p : \mathcal{V} \longrightarrow \Omega : (X,V) \rightsquigarrow X \quad , \quad \tilde{p} : \mathcal{W} \longrightarrow \Omega : (X,W) \rightsquigarrow X$$

$$J : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W} : (X,V) \rightsquigarrow (X, j_X\ V)$$

qui vérifient la relation $\tilde{p} \circ J = p$*. Sur le sextuplet* $(\mathcal{V},\mathcal{W},\Omega,p,\tilde{p},J)$ *est défini le* δ*-atlas vectoriel*

$$\{(\Omega_\alpha, \phi_\alpha, \gamma_\alpha, \Delta_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$$

où

$$\phi_\alpha : p^{-1}(\Omega_\alpha) \longrightarrow \Omega_\alpha \times \mathbb{F}_\alpha : (X,V) \rightsquigarrow (X, \mathcal{H}_{\mathbb{F}_\alpha}\ V)$$

$$\gamma_\alpha : \tilde{p}^{-1}(\Omega_\alpha) \longrightarrow \Omega_\alpha \times \mathbb{F}^p_\alpha : (X,W) \rightsquigarrow (X, \mathcal{H}_{\mathbb{F}_\alpha}\ W)$$

on a

$$\phi_\alpha^{-1}(X,v) = (X,\ \xi'_\alpha\ (\zeta_\alpha(X)\ v) \quad , \gamma_\alpha^{-1}(X,w) = (X, \zeta_\alpha \circ (\zeta_\alpha(X))w)$$

Ce δ*-atlas vectoriel définit sur* $(\mathcal{V},\mathcal{W},\Omega,p,\tilde{p},J)$ *une structure de* δ*-fibré vectoriel dont on notera* (θ,θ,J) *le* δ*-couple de fibrés vectoriels associé.*

Proposition 6 :

Le δ-couple de fibrés vectoriels $(\mathcal{C}(\Omega), \widetilde{\mathcal{C}}(\Omega), J_{\mathcal{C}})$ associé au δ-fibré tangent à Ω est isomorphe à $(\theta, \widetilde{\theta}, J)$
En particulier les fibrés vectoriels θ et $\mathcal{C}(\Omega)$ d'une part, $\widetilde{\theta}$ et $\widetilde{\mathcal{C}}(\Omega)$ d'autre part sont isomorphes.

Démonstration :

Les bijections

$$f : V \in T_X \Omega \rightsquigarrow (X,V) \text{ avec } V = \text{représentant de } V \text{ dans } (\Omega_X, \xi_X, \Delta_X)$$

$$\widetilde{f} : W \in \widetilde{T}_X \Omega \rightsquigarrow (X,W) \text{ avec } W = \text{représentant de } W \text{ dans } (\Omega_X, \xi_X, \Delta_X)$$

telles que $\widetilde{f} \circ J_{\mathcal{C}} = J \circ f$ déterminent un isomorphisme au dessus de id_Ω $(\mathcal{C}(\Omega), \widetilde{\mathcal{C}}(\Omega), J_{\mathcal{C}}) \longrightarrow (\theta, \widetilde{\theta}, J)$.

Proposons nous maintenant de déterminer, à des isomorphismes près, les fibrés vectoriels $\mathcal{C}(T\Omega)$, $\widetilde{\mathcal{C}}(T\Omega)$, $\mathcal{C}(\widetilde{T\Omega})$ (*) $T\Omega$ (resp : $\widetilde{T}\Omega$) étant identifié à $\{(X,U) \mid X \in \Omega, U \in \mathbb{F}_X (\text{resp} : \mathbb{F}^p_X)\}$.

Un élément $t \in T_{(X,V)} \widetilde{T} \Omega$ (par exemple) est une classe pour la relation d'équivalence telle que

(1) $((X,V),(\omega_\alpha, h_\alpha)) \sim ((X,V),(\omega_\beta, h_\beta))$ $(\omega_\alpha \in \mathbb{F}_\alpha, \omega_\beta \in \mathbb{F}_\beta, h_\alpha \in \mathbb{F}^p_\alpha, h_\beta \in \mathbb{F}^p_\beta$

$\Longleftrightarrow$ $\omega_\beta = \varphi_{\mathbb{F}_\beta} \xi'_\alpha (\ X) (\omega_\alpha)$

et $h_\beta = \varphi_{\mathbb{F}^p_\beta} (\xi^o_\alpha(\zeta_\alpha X)(h_\alpha) + \xi_\alpha'(\ X) (\omega_\alpha) (\varphi_{\mathbb{F}^p_\alpha} V)$

(Les éléments de $TT\Omega$ et $\widetilde{TT}\Omega$ sont déterminés de façon analogue). Soit $((X,V),(W,H))$ le représentant de t dans la δ-carte $(\Omega_X, \zeta_X, \Delta_X)$, compte tenu des formules du n°2 et de (1)

(2) $\omega_\beta = \varphi_{\mathbb{F}_\beta} W$ et $h_\beta = \varphi_{\mathbb{F}^p_\beta} (H - \alpha^p_X \ B_p(V,W))$

(*) cf variétés bimodelées §2 n°7

Introduisons les ensembles

$$\mathcal{H} = \{((X,V),(W,H - \alpha_X B(V,W)) \mid X \in \Omega,\ V, W,\ H \in \mathbb{F}_X\}$$

$$\tilde{\mathcal{H}} = \{((X,V),(W,H - \alpha_X^p B_p(V,W)) \mid X \in \Omega,\ V \in \mathbb{F}_X,\ W,H \in \mathbb{F}_X^p\}$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \{((X,V),(W,H - \alpha_X^p B_p(V,W)) \mid X \in \Omega,\ W \in \mathbb{F}_X,\ V,H \in \mathbb{F}_X^p\}$$

et les applications

$$p_{T\Omega} : \mathcal{H} \longrightarrow T\Omega, \quad \tilde{p}_{T\Omega} : \tilde{\mathcal{H}} \longrightarrow T\Omega, \quad p_{\tilde{T}\Omega} : \hat{\mathcal{H}} \longrightarrow \tilde{T}\Omega$$

telles que (par exemple) :

$$p_{\tilde{T}\Omega}\ ((X,V),(W,H - \alpha_X^p B_p(V,W)) = (X,V)$$

Sur les triplets $(\mathcal{H}, p_{T\Omega}, T\Omega)$, $(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{p}_{T\Omega}, T\Omega)$, $(\hat{\mathcal{H}}, p_{\tilde{T}\Omega}, \tilde{T}\Omega)$ *on définit des structures de fibrés vectoriels, par exemple sur ce dernier les cartes vectorielles* $(\tilde{p}_\Omega^{-1}(\Omega_\beta), \phi_\beta, \mathbb{F}_\beta \times \mathbb{F}_\beta^p)$ *où*

$$\phi_\beta : ((X,V),(W,H - \alpha_X^p B_p(V,W)) \longrightarrow ((X,V)(w_\beta, h_\beta)) \text{ défini par (2)}$$

forment un atlas vectoriel dont les applications de transitions sont les

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : ((X,V)(w_\alpha, h_\alpha)) \rightsquigarrow ((X,V)(w_\beta, h_\beta)) \text{ selon la relation (2).}$$

On obtient ainsi trois structures de fibrés vectoriels de classe $\mathcal{C}^\infty$ *et à fibres dans la catégorie des espaces de Banach :*

$\theta(T\Omega)$ *sur* $(\mathcal{H}, p_{T\Omega}, T\Omega)$

$\tilde{\theta}(T\Omega)$ *sur* $(\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{p}_{T\Omega}, T\Omega)$

$\theta(\tilde{T}\Omega)$ *sur* $(\hat{\mathcal{H}}, p_{\tilde{T}\Omega}, \tilde{T}\Omega)$

Proposition 7 :

$\mathcal{C}(T\Omega)$ et $\theta(T\Omega)$, $\tilde{\mathcal{C}}(T\Omega)$ et $\tilde{\theta}(T\Omega)$, $\mathcal{C}(\tilde{T}\Omega)$ et $\theta(\tilde{T}\Omega)$ forment des couples de fibrés vectoriels isomorphes.

Par exemple dans le troisième cas l'application

(3) $t \rightsquigarrow ((X,V),(W,H - \alpha_X^p B_p(V,W))$ *où* $((X,V),(W,H))$ *est le représentant de* t *dans* $(\Omega_X, \zeta_X, \Delta_X)$ *détermine un isomorphisme de* $\mathcal{C}(\tilde{T}\Omega)$ *sur* $\theta(\tilde{T}\Omega)$ *dont l'expression avec la carte* $(\tilde{p}_\Omega^{-1}\Omega_\alpha, T\tilde{\zeta}_\alpha, \Delta_0^2)$ *de* $\mathcal{C}(\tilde{T}\Omega)$ *et la carte* $(\tilde{p}_\Omega^{-1}(\Omega_\beta), \phi_\beta, \mathbb{F}_\beta \times \mathbb{F}_\beta^p)$ *n'est autre que :*

$((X,V)(\omega_\alpha, h_\alpha) \rightsquigarrow ((X,V),(\omega_\beta, h_\beta))$ *selon la relation (1).*

Soit :

$$(4)\quad L : \mathcal{H} \longrightarrow \tilde{\mathcal{H}} : ((X,V),(W,H - \alpha_X B(V,W)) \rightsquigarrow ((X,V),(j_X W, j_X h - \alpha^p_X B_p(j_X W,V))$$

L'application L est une injection qui applique linéairement chaque fibre de $\theta(T\Omega)$ sur un sous-espace vectoriel dense de la fibre image dans $\tilde{\theta}(T\Omega)$.

Corollaire 1 :

Le δ-fibré vectoriel $(\mathcal{C}(T\Omega), \tilde{\mathcal{C}}(T\Omega), L_{\mathcal{C}})$ est isomorphe à

$(\theta(T\Omega), \tilde{\theta}(T\Omega), L)$

On sait aussi que p_Ω est bidifférentiable (*), on a

$$T_{p_\Omega} : \mathcal{H} \longrightarrow T\Omega : ((X,V),(W,H - \alpha_X B(V,W)) \rightsquigarrow (X,W)$$

$$\tilde{T}_{p_\Omega} : \tilde{\mathcal{H}} \longrightarrow T\Omega : ((X,V),(W,H - \alpha^p_X B_p(W,V))) \rightsquigarrow (X,W)$$

Les isomorphismes canoniques $s : \mathcal{C}(T\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}(\Omega)$, $\tilde{s} : \mathcal{C}(\tilde{T\Omega}) \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}(T\Omega)$ (*) s'expriment par

$$s : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^\circ : ((X,V),(W,H - \alpha_X B(V,W))) \rightsquigarrow ((X,W),(V,H - \alpha_X B(V,W)))$$

$$\tilde{s} : \tilde{\mathcal{H}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{H}}^\circ : ((X,V),(W,H - \alpha^p_X B_p(V,W)) \rightsquigarrow ((X,W),(V,H - \alpha^p_X B_p(V,W)))$$

De plus $TJ : ((X,V),(W,H - \alpha_X B(V,W))) \rightsquigarrow ((X,j_X V),(W,j_X H - \alpha^p_X B_p(J_X V,W)))$

Les champs de vecteurs canoniques $\mathcal{V} : T\Omega \longrightarrow TT\Omega$, $\tilde{\mathcal{V}} : \tilde{T\Omega} \longrightarrow \tilde{TT\Omega}$ sont tels que :

$$\mathcal{V} : (X,V) \rightsquigarrow ((X,V),(0,V)) \qquad V \in \mathbb{F}_X$$

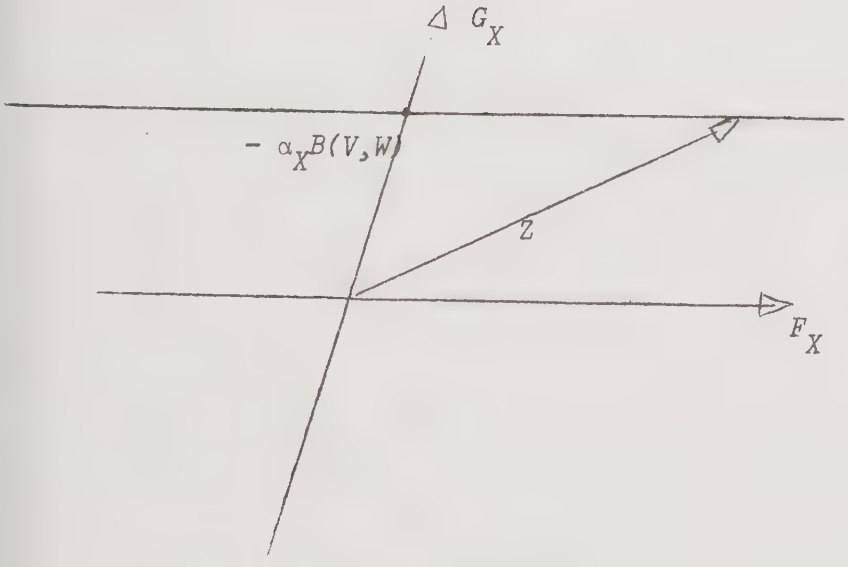
$$\tilde{\mathcal{V}} : (X,W) \rightsquigarrow ((X,W),(0,W)) \qquad W \in \mathbb{F}^p_X$$

Remarque :

La fibre $T_{(X,V)} T\Omega$ (resp : $\tilde{T}_{(X,V)} T\Omega$) s'identifie au sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}_X \times \mathbb{E}$ (resp : $\mathbb{F}^p_X \times \mathbb{E}^p$) formé des couples (W,Z) tels que $\mathcal{C}_X Z = - \alpha_X B(V,W)$ *(resp :* $\mathcal{C}^p_X Z = - \alpha^p_X B_p(W,V)$*).*

(*) cf : Variétés bimodelées §2 n°7

La fibre $T_{(X,V)}\widetilde{T\Omega}$ *s'identifie au sous-espace de* $\mathbb{F}_X \times \mathbb{E}^p$ *formé des couples* (W,Z) *tels que* $\P_{\mathbb{E}^p} Z = -\alpha_X^p B_p(V,W)$.



§3. LES STRUCTURES DE VARIETES BIMODELEES SUR Λ_η

Rappelons que η *est une partie mesurable de* I *et que* $\mathbb{L}_\eta$ *est le sous-espace de* $\mathbb{L}^\infty(I)$ *formé des classes d'applications nulles sur* $I \div \eta$ (*)

Λ_η *est l'ensemble des* $X \in \mathbb{E}$ *tels que*

- $\underset{\sim}{Q}(X)$ *est inversible dans* $\mathbb{L}^\infty(I)$
- $\underset{\wedge}{Q}(X) \in e + \mathbb{L}_\eta$

Le principe de construction des cartes de Λ_η *est analogue à celui qui a permis de construire celles de* Ω.

Soit $X_o \in \Omega$, *nous allons chercher la relation existant entre* $u \in \mathbb{L}^\infty(I)$ $x \in \mathbb{F}_{X_o}$, $\varkappa \in e + \mathbb{L}_\eta$ *pour que :*

(1) $X = X_o + x + \alpha_{X_o}(u) \in \Lambda_\eta$, $\underset{\wedge}{Q}(X) = \varkappa$

Cela s'écrit

(*) $\underset{\wedge}{Q}(X_o)\,(e+u)^2 + \underset{\wedge}{Q}(x) = \varkappa$

Equation dont les solutions dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *sont de la forme*

$$u_\varepsilon(x,\varkappa) = -e + \varepsilon \left(\frac{\varkappa - \underset{\wedge}{Q}(x)}{\underset{\wedge}{Q}(X_o)} \right)^{1/2} \quad , \text{ avec } \varepsilon^2 = e$$

D'après (*), *la condition* $\varkappa - \underset{\wedge}{Q}(x) \in \mathbb{P}$ *est donc nécessairement vérifiée si* $x = \mathrm{pr}_{\mathbb{F}_{X_o}} X$, $\varkappa = \underset{\wedge}{Q}(X)$ *avec* $X \in \Lambda_\eta$; *par conséquent si* $x \in \mathbb{F}_{X_o}$, $u \in \mathbb{L}^\infty(I)$ *les propriétés*

(1) $X = X_o + x + \alpha_{X_o}(u) \in \Lambda_\eta$ *et* $\underset{\wedge}{Q}(X) = \varkappa \in e + \mathbb{L}_\eta$

(2) $\varkappa - \underset{\wedge}{Q}(x) \in \mathbb{P}$ *et* $\exists\, \varepsilon$ *tel que* $\varepsilon^2 = e$, $u = u_\varepsilon(x,\varkappa) \equiv -e + \varepsilon \left(\frac{\varkappa - \underset{\wedge}{Q}(x)}{\underset{\wedge}{Q}(X_o)} \right)^{1/2}$

sont équivalentes. De plus, dans ces conditions :

(3) $B(X_o, X) = \varepsilon \left(\frac{\varkappa - \underset{\wedge}{Q}(x)}{\underset{\wedge}{Q}(X_o)} \right)^{1/2}$

Avec la condition (2), $(x,\varkappa)$ *ne décrit pas un ouvert de* $F_{X_o} \times (e + \mathbb{L}_\eta)$; *pour définir des cartes de* Λ_η, *appliquant une partie de* Λ_η *sur un ouvert de* $F_{X_o} \times (e + \mathbb{L}_\eta)$, *on remarque que si*

(*) η *est l'ensemble des paramètres* $s \in I$ *des points du milieu continu situés dans les régions où ce milieu continu est extensible.*

$X_o \in \Lambda_\eta$, $X = X_o + x + \alpha_{X_o}(u_\varepsilon(x,z))$

les propriétés suivantes sont équivalentes :

(4) $B(X_o,X)$ *est inversible.*

(5) $\varepsilon\, B(X_o,X) \in \overset{o}{\mathbb{P}}$

(6) $z - \underset{\wedge}{Q}(x) \in \overset{o}{\mathbb{P}}$

et chacune de ces propriétés entraine

(7) $\varepsilon \in \mathbb{L}^\infty(I)$

Ces propriétés suggèrent de définir les ensembles

$$\omega_{X_o} = \{(x,z) \in \mathbb{F}_{X_o} \times (e + \mathbb{L}_\eta) \mid z - \underset{\wedge}{Q}(x) \in \overset{o}{\mathbb{P}}\}$$

$$\Lambda^\varepsilon_{\eta X_o} = \{X \in \Lambda_\eta \mid \varepsilon\, B(X_o,X) \in \overset{o}{\mathbb{P}}\}$$

(où $\varepsilon \in \mathbb{L}^\infty(II)$ *est fixé avec* $\varepsilon^2 = e$*)*

et les applications

(8) $\xi^\varepsilon_{X_o} : \omega_{X_o} \longrightarrow \Lambda^\varepsilon_{\eta X_o} : (x,z) \rightsquigarrow X_o + x + \alpha_{X_o}(u_\varepsilon(x,z)) = \xi^\varepsilon_{X_o}(x,z)$

ω_{X_o} *, image réciproque de l'ouvert* $\overset{o}{\mathbb{P}}$ *de* $\mathbb{L}^\infty(I)$ *par l'application continue* $(x,z) \rightsquigarrow z - \underset{\wedge}{Q}(x)$ *, est un ouvert de* $\mathbb{F}_{X_o} \times (e + \mathbb{L}_\eta)$ *;* $\Lambda^\varepsilon_{\eta X_o}$ *est un ouvert de* Λ_η *muni de la topologie induite par* $\mathbb{E}$*.*

Remarque :

Si $\eta = \emptyset$, $\Lambda_\emptyset = \Omega$ *et l'on retrouve les ensembles et les applications* $\xi^\varepsilon_{X_o}$ *introduits dans le §2 (en identifiant* $\mathbb{F}_{X_o}$ *et* $\mathbb{F}_{X_o} \times \{e\}$ *)*

. Si $\eta = I$. $\Lambda = \Lambda_I$ *est un ouvert de* $\mathbb{E}$*.*

Proposition 8 :

$\xi^\varepsilon_{X_o}$ *est un homéomorphisme de* ω_{X_o} *sur* $\Lambda^\varepsilon_{\eta X_o}$

$(\xi^\varepsilon_{X_o})^{-1}$ *est la restriction de* $(\Pi_{\mathbb{F}} - X_o(0), \underset{\wedge}{Q})$ *à* $\Lambda^\varepsilon_{\eta X_o}$

(Λ_η *est muni de la topologie induite par* $\mathbb{E}$*)*

La démonstration est analogue à celle de la proposition 3).

Corollaire :

Posons $\xi_{X_o} = \xi^e_{X_o}$, $\Lambda_{\eta,X_o} = \Lambda^e_{\eta,X_o}$ *(cas où* $\varepsilon = e$*)*

ξ_{X_o} *est un homéomorphisme de* ω_{X_o} *sur le voisinage ouvert* Λ_{η,X_o} *de* X_o *dans* Λ_η.

$p \in (+1, \infty)$ *étant fixé, on pose maintenant*

$$\Delta_{X_o} = (\mathbb{F}_{X_o} \times \mathbb{L}_\eta,\ \mathbb{F}^p_{X_o} \times \mathbb{L}^p_\eta\ ,\ j_{X_o} \times \ell)$$

$$\Delta = (\mathbb{E},\ \mathbb{E}^p,\ j)$$

où $j : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}^p$ *est l'injection naturelle*

j_{X_o} *est la restriction de* j *à* $\mathbb{F}_{X_o}$

ℓ *est l'injection naturelle de* $\mathbb{L}_\eta$ *dans* $\mathbb{L}^p_\eta$

$(\mathbb{L}^p_\eta$ *= sous-espace de* $\mathbb{L}^p(I)$ *formé des classes d'applications nulles sur* $I \doteq \eta)$

Δ *et* Δ_{X_o} *sont des* δ*-couples d'espaces de Banach.*

Proposition 9 :

L'application $\xi^\varepsilon_{X_o} : \omega_{X_o} \longrightarrow \mathbb{E}$ *est, infiniment différentiable et oidifférentiable de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *(pour les* δ*-couples* Δ_{X_o} *et* Δ*)* (*)

Désignons par $\varpi_{\mathbb{F}}$ *et* $\varpi_{\mathbb{L}}$ *(resp :* $\varpi_{\mathbb{F}^p}$ *et* $\varpi_{\mathbb{L}^p}$*) les projections (linéaires continues) de* $\mathbb{F}_{X_o} \times \mathbb{L}_\eta$ *(resp :* $\mathbb{F}^p_{X_o} \times \mathbb{L}^p_\eta$*) sur les espaces facteurs. Posons*

$$h(x,\varkappa) = \varkappa - \underset{\sim}{O}(x) \quad \text{pour} \quad (x,\varkappa) \in \omega_{X_o}$$

$$g(u) = \varkappa_o^{-\frac{1}{2}}\, u^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour} \quad u \in \overset{o}{\mathbb{P}} \quad (\varkappa_o = \underset{\sim}{O}(X_o))$$

Alors

$$\xi^\varepsilon_{X_o}(x,\varkappa) = X_o(0) + x + \alpha_{X_o} \circ \varepsilon \circ g \circ h \ (x,\varkappa)$$

les applications figurant dans cette expression sont infiniment différentiables, il en est de même pour $\xi^\varepsilon_{X_o}$

$$\xi^\varepsilon_{X_o}{}'(x,\varkappa) = \varpi_{\mathbb{F}} + \alpha_{X_o} \circ (\varepsilon \circ g \circ h)'\ (x,\varkappa)$$

$$\xi^\varepsilon_{X_o}{}^{(n)}(x,\varkappa) = \alpha_{X_o} \circ (\varepsilon \circ g \circ h)^{(n)}\ (x,\varkappa) \qquad \text{pour } n \geqslant 2$$

(*) $\xi^\varepsilon_{X_o}$ *est définie sur un ouvert* ω_{X_o} *d'une variété affine* $\mathbb{F}_{X_o} \times (e + \mathbb{L}_\eta)$ *associée au sous-espace vectoriel* $\mathbb{F}_{X_o} \times \mathbb{L}_\eta$ *de* $\mathbb{F}_{X_o} \times \mathbb{L}^\infty(I)$.

On différentie sur cette variété affine.

Des calculs sans difficulté donnent pour $(x,z)\in w_{X_o}$ (x_1,z_1) *et* $(x_2,z_2)\in \mathbb{F}_{X_o}\times \mathbb{L}_\eta$ (*)

$$\xi^{\varepsilon}_{X_o}{}'(x,z)\ (x_1,z_1) = x_1 + \frac{1}{2}\int_o \varepsilon z_o^{-\frac{1}{2}}\,(z-\underset{\wedge}{Q}(x))^{-\frac{1}{2}}\,(z_1 - 2B(x,x_1))X'_o$$

$$\xi^{\varepsilon}_{X_o}{}''(x,z)\ (x_1,z_1)\ (x_2,z_2) = -\int_o \varepsilon z_o^{-\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{4}(z-\underset{\wedge}{Q}(x))^{-\frac{3}{2}}(z_1-2B(x,x_1))(z_2-2B(x,x_2))+(z-\underset{\wedge}{Q}(x))^{-\frac{1}{2}}B(x_1,x_2)\Big)X'_o$$

Si l'on pose

$$\xi^{\varepsilon\,o}_{X_o}(x,z) = \varpi_{\mathbb{F}^p} + \alpha^{(p)}_{X_o}\circ(z_o^{-\frac{1}{2}}\,(z-\underset{\wedge}{Q}(x))^{-\frac{1}{2}}\,(\varpi_{\mathbb{L}^p} - 2B_p\,(x,\varpi_{\mathbb{F}^p})$$

alors

$$\xi^{\varepsilon\,o}_{X_o}(x,z)\circ(j_{X_o}\times \ell) = j\circ \xi^{\varepsilon}_{X_o}{}'(x,z)$$

comme l'application

$$\xi^{\varepsilon\,o}_{X_o} : w_{X_o} \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathbb{F}^p_{X_o} + \mathbb{L}^p_\eta)$$

est infiniment différentiable la proposition est établie.

En particulier on a les formules :

$$\xi_{X_o}(0,z) = X_o(0) + \alpha_{X_o}\,(z_o^{-\frac{1}{2}}\,z^{\frac{1}{2}})$$

$$\xi'_{X_o}(0,z_o) = \varpi_{\mathbb{F}} + \frac{1}{2}\,\alpha_{X_o}\circ z_o^{-1}\,\varpi_{\mathbb{L}}\ ,\ \xi^{o}_{X_o}(0,z_o) = \varpi_{\mathbb{F}^p} + \frac{1}{2}\,\alpha^{(p)}_{X_o}\circ z_o^{-1}\varpi_{\mathbb{L}^p}$$

$$\xi''_{X_o}(0,z_o) = -\frac{1}{4}\,\alpha_{X_o}\circ z_o^{-2}\cdot\varpi_{\mathbb{L}}\cdot\varpi_{\mathbb{L}} - \alpha_{X_o}\circ z_o^{-1}\cdot B(\varpi_{\mathbb{F}},\varpi_{\mathbb{F}})$$

$$\xi^{o\prime}_{X_o}(0,z_o) = -\frac{1}{4}\,\alpha^{(p)}_{X_o}\circ z_o^{-2}\,\varpi_{\mathbb{L}^p}\cdot\varpi_{\mathbb{L}} - \alpha^{(p)}_{X_o}\circ z_o^{-1}\,B_p\,(\varpi_{\mathbb{F}^p},\varpi_{\mathbb{F}})$$

(c'est à dire que $\xi''_{X_o}(0,z_o)\ (x_1,z_1)\ (x_2,z_2) = -\int_o \Big(\frac{1}{4}\,z_o^{-2}\,z_1z_2 + z_o^{-1}\,B(x_1,x_2)\Big)X'_o$

Le δ*-atlas* $\mathfrak{B}^{(p)}$ $(1<p<+\infty)$

Soit $\{X_\alpha \mid \alpha\in\}\}$ *une famille de points de* Λ_η *telle que les ensembles* $\Lambda_{\eta,X} = \Lambda^{e}_{\eta,X}$ *recouvrent* Λ_η, *posons*

$$\mathfrak{B}^{(p)} = \{(\Lambda_{\eta,\alpha},\ \xi_\alpha,\ \Delta_\alpha \mid \alpha\in\}\}$$

avec $\zeta_\alpha = \xi_\alpha^{-1}$ où $\xi_\alpha = \xi^e_{X\alpha} : \omega_\alpha \longrightarrow \Lambda_{\eta,\alpha}$, $\omega_\alpha = \omega_{X_\alpha}$, $\Delta_\alpha = \Delta_{X_\alpha}$

(le nombre p qui intervient dans Δ_α est supposé fixé). $\mathcal{B}^{(p)}$ est un δ-atlas qui définit sur l'ensemble Λ_η une structure bimodelée dans la catégorie $\mathcal{F}^{(*)}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il suffit de vérifier que

1°) Les ensembles $\Lambda_{\eta\alpha}$ recouvrent Λ_η

2°) Toute application ζ_α est une bijection de $\Lambda_{\eta\alpha}$ sur un ouvert de $\mathbb{F}_\alpha \times \mathbb{L}_\eta$

3°) Pour tout couple α, β tel que $\Lambda_{\eta,\alpha} \cap \Lambda_{\eta,\beta} \neq \emptyset$ $\zeta_\alpha(\Lambda_{\eta,\alpha} \cap \Lambda_{\eta,\beta})$ est ouvert dans $\mathbb{F}_\alpha$ et l'application de transition

$$\zeta_\beta \circ \zeta_\alpha^{-1} : \zeta_\alpha(\Lambda_{\eta\alpha} \cap \Lambda_{\eta\beta}) \longrightarrow \zeta_\beta(\Lambda_{\eta,\alpha} \cap \Lambda_{\eta,\beta})$$

est bidifférentiable et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Seule la 3°) propriété est à vérifier, or on remarque que

$$\zeta_\beta \circ \zeta_\alpha^{-1}(x,z) = (\mathfrak{M}_{\mathbb{F}} - Y(0), \underset{\wedge}{0}) \circ \xi_\alpha(x,z)$$

Or l'application affine $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}} - Y(0)$ est bidifférentiable ainsi que $\underset{\wedge}{0}(\underset{\wedge}{0}^0(X) = B_p(X,.))$ par suite, avec la proposition 9, l'application figurant dans le 3°), qui peut être considérée comme composée de deux applications bidifférentiables et de classe $\mathcal{C}^\infty$, l'est aussi.

<u>Remarque</u> :

Lorsque $\eta = I$, Λ est un ouvert de $\mathbb{E}$ et l'on a ainsi mis en évidence sur Λ des cartes autres que la δ-carte triviale

$(\Lambda$, injection $\Lambda \longrightarrow \mathbb{E}, (\mathbb{E}, \mathbb{E}^p, j)$.

<u>Propriétés des ensembles ω_{X_0} et $\Lambda^\varepsilon_{\eta,X_0}$</u>

D'après les lemmes 1 et 2 les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $(x,\tau) \in \omega_{X_0}$

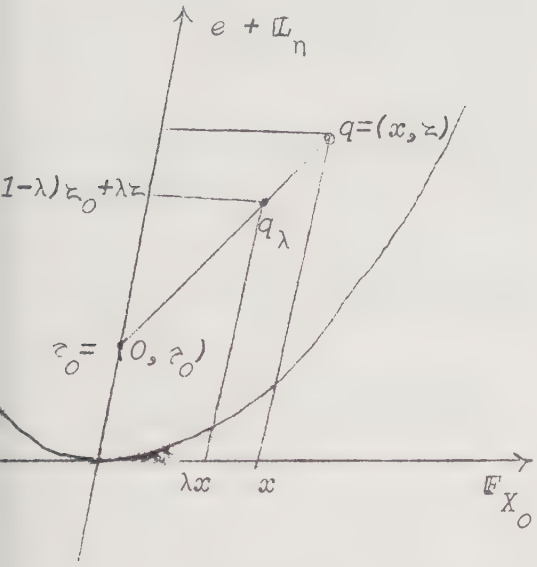
(b) $\exists k > 0$ tel que $\tau - \underset{\wedge}{0}(x) \geq ke$

(*) $\mathcal{F}$ est construite à partir de Γ_1 (resp : Γ_2) = catégorie des espaces de Banach (resp : réflexifs) cf théorie des variétés bimodelées §2 n°1 chap I

On déduit de la 3°) propriété que ω_{X_o} est connexe : si $q_o = (0, \succeq_o)$, $q = (x, \succeq) \in \omega_{X_o}$ alors le segment (q_o, q) est contenu dans ω_{X_o}, par suite

$$\omega_{X_o} = \bigcup_{q \in \omega_{X_o}} (q_o, q)$$

est une partie connexe de $\mathbb{F}_{X_o} \times (e + \mathbb{L}_\eta)$



En effet, par hypothèse, il existe $k > 0$ tel que : $\succeq_o \geqslant ke$, $\succeq - \hat{Q}(x) \geqslant ke$ et il faut montrer que pour $\lambda \in (0,1)$ le point

$$q_\lambda = (\lambda x, (1-\lambda)\succeq_o + \lambda \succeq)$$

est dans ω_{X_o}. Or $(1-\lambda)\succeq_o + \lambda \succeq - \lambda \hat{Q}(x) \geqslant ke$ et, comme $\lambda \in (0, 1)$ $(\lambda - \lambda^2)\hat{Q}(x) = \lambda \hat{Q}(x) - \hat{Q}(\lambda x) \geqslant 0$, d'où la relation

$$(1-\lambda)\succeq_o + \lambda \succeq - \hat{Q}(\lambda x) \geqslant ke$$

qui signifie que $q_\lambda \in \omega_{X_o}$.

$\Lambda^{\varepsilon}_{\eta, X_o}$ est donc connexe (puisque homéomorphe à ω_{X_o} d'après la proposition 5). L'interprétation de ε ainsi que la caractérisation géométrique des arcs de $\dot{\Sigma}$ correspondant aux fonctions $\Lambda^{\varepsilon}_{\eta, X_o}$ sont analogues à celles données au §2 pour $\Omega^{\varepsilon}_{X_o}$.

Le δ-fibre tangent à Λ_η

Les considérations du §2 n°3 peuvent être étendues aux variétés bimodelées Λ_η munies du δ-atlas

$$\mathcal{B}^{(p)} = \{(\Lambda_{\eta\alpha}, \zeta_\alpha, \Delta_\alpha \mid \alpha \in \Lambda_\eta\}$$

Soit $\chi_\eta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction caractéristique de η, considérons les deux ensembles

$$\mathcal{V} = \{(X, V) \mid X \in \Lambda_\eta,\ V \in \mathbb{E},\ (e - \chi_\eta)\, B(X, V) = 0\}$$

$$\mathcal{W} = \{(X, W) \mid X \in \Lambda_\eta,\ W \in \mathbb{E}^{(p)},\ (e - \chi_\eta)\, B_p(X, W) = 0\}$$

et les applications

$$p : \mathcal{V} \longrightarrow \Lambda_\eta : (X, V) \rightsquigarrow X, \quad \widetilde{p} : \mathcal{W} \longrightarrow \Lambda_\eta : (X, W) \rightsquigarrow X$$

$$J : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W} : (X, V) \rightsquigarrow (X, jV).$$

Sur le sextuplet $(\mathcal{V}, \mathcal{W}, \Lambda_\eta, p, \widetilde{p}, J)$ *on peut définir le* δ*-atlas vectoriel*

$$(8) \qquad \{(\Lambda_{\eta\alpha}, \emptyset_\alpha, \Psi_\alpha, \Delta_\alpha \mid \alpha \in \Lambda_\eta\}$$

où

$$\emptyset_\alpha : p^{-1}(\Lambda_{\eta\alpha}) \longrightarrow \Lambda_{\eta\alpha} \times (\mathbb{F}_\alpha \times \mathbb{L}_\eta) : (X,V) \rightsquigarrow (X, \oplus_{\mathbb{F}_\alpha} V, 2B(X,W))$$

$$\Psi_\alpha : \widetilde{p}^{-1}(\Lambda_{\eta\alpha}) \longrightarrow \Lambda_{\eta\alpha} \times (\mathbb{F}_\alpha^p \times \mathbb{L}_\eta^p) : (X,W) \rightsquigarrow (X, \oplus_{\mathbb{F}_\alpha^*} W, 2B_p(X,W))$$

On a les relations (tirées des formules figurant dans la démonstration de la proposition 9) :

$$\emptyset_\alpha^{-1}(X,(v,z)) = (X, \xi'_\alpha(\xi_\alpha X)(v,z)), \quad \Psi_\alpha^{-1}(X,(v,z)) = (X, \xi^o_\alpha(\xi_\alpha X)(v,z))$$

Le δ*-atlas vectoriel (8) définit sur* $(\mathcal{V}, \mathcal{W}, \Lambda_\eta, p, \widetilde{p}, J)$ *une structure de* δ*-fibré vectoriel dont on notera* $(\theta, \widetilde{\theta}, J)$ *le* δ*-couple de fibrés associés.*

<u>*Proposition 10*</u> *:*

Le δ*-couple de fibrés vectoriels* $(\tau(\Lambda_\eta), \widetilde{\tau}(\Lambda_\eta), J_\tau)$ *associé au* δ*-fibré tangent à* Λ_η *est isomorphe à* $(\theta, \widetilde{\theta}, J)$.

En particulier les fibrés vectoriels θ *et* $\tau(\Lambda_\eta)$ *d'une part ,* $\widetilde{\theta}$ *et* $\widetilde{\tau}(\Lambda_\eta)$ *d'autre part sont isomorphes.*

<u>*Démonstration*</u> *:*

Par exemple un vecteur tangent $v \in T_X \Lambda_\eta$ *est une classe de couples* $(v_\alpha, z_\alpha) \in \mathbb{F}_\alpha \times \mathbb{L}_\eta$, $\alpha \in \Lambda_\eta$, $\in \Lambda_{\eta\alpha}$ *tels que :*

$$(9) \qquad (v_\alpha, z_\alpha) = \xi'_\alpha(X) \circ \xi'_\beta(\xi_\beta X)(v_\alpha, z_\alpha) \quad \text{si} \quad X \in \Lambda_{\eta\alpha} \cap \Lambda_{\eta\beta}$$

Si $(v,z) \in \mathbb{F}_X \times \mathbb{L}_\eta$ *est le représentant de* v *correspondant à* $\beta = X$ *et si l'on pose*

$$V = v + \frac{1}{2} \alpha_X (\hat{O}(X)^{-1} z) = \xi'_X(O, \hat{O}(X))(v,z)$$

alors $(X, V) \in \mathcal{V}$ *et d'après (9) et l'expression de* $\emptyset_\alpha$

$$\forall \alpha \in \Lambda_\eta : \emptyset_\alpha(X,V) = (X, (v_\alpha, z_\alpha)$$

On en déduit, le raisonnement correspondant aux vecteurs $w \in \widetilde{T}_X \Lambda_\eta$ *étant analogue à celui fait ci-dessus, que les bijections*

$$f : v \in T_X \Lambda_\eta \rightsquigarrow (X, V) \quad , \quad \widetilde{f} : w \in \widetilde{T}_X \Lambda_\eta \rightsquigarrow (X, W)$$

où V *et* W *sont définis par :*

$V = v + \frac{1}{2}\ \alpha_X\ (\underset{\wedge}{O}(X)^{-1}\ z)$ *avec* (v, z) = *représentant de* v *dans la* δ-*carte* $(\Lambda_\eta X\ \xi_X, \Delta_X)$.

$W = w + \frac{1}{2}\ \alpha_X^{(p)}\ (\underset{\wedge}{O}(X)^{-1} z)$ *avec* (w, z) = *représentant de* w *dans la* δ-*carte* $(\Lambda_\eta X, \xi_X, \Delta_X)$

telles que $\widetilde{f} \circ J = J \circ f$ *déterminent un isomorphisme au dessus de* id_{Λ_η} *de* $(z(\Lambda_\eta), \widetilde{z}(\Lambda_\eta), J_z)$ *à* $(\theta, \widetilde{\theta}, J)$.

§4. LA SOUS-VARIETE BIMODELEE Ω_1 DE Ω

n°1. Définitions et notations

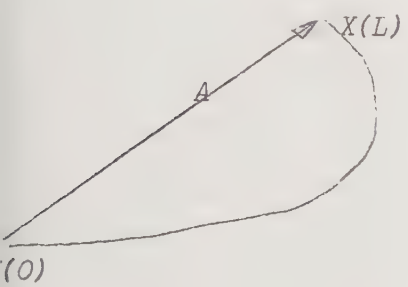
Définition 5 :

1°) Soit U un vecteur unitaire de $\mathcal{E}$, $X \in \Lambda$ et U-singulier si X' est la classe d'une fonction à valeurs dans le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}U$ de $\mathcal{E}$.

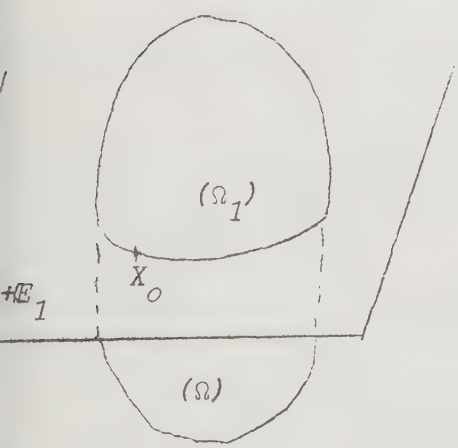
2°) $X \in \Lambda$ est singulier s'il existe un $U \in \mathcal{E}$ tel que X soit U-singulier. Si $X \in \Omega$ est U-singulier alors X' a ses valeurs dans $\{-U, U\}$ (presque partout).

Définition 6 :

Soit $A \in \mathcal{E}$ avec $|A| \leq L$, l'espace des configurations d'un fil inextensible dont les extrémités sont liées est le sous-ensemble Ω_1 de Ω forme des éléments X tels que : X n'est pas singulier,



$X(O) = O$ et $X(L) = A$.
(Comme la relation $\overset{\frown}{O}(X) = e$ entraine $|X(L) - X(O)| \leq L$ la condition $|A| \leq$ est nécessaire pour que $\Omega_1 \neq \emptyset$ les raisons pour lesquelles les éléments de Ω_1 ne doivent pas être singuliers apparaitront au n°3 lorsqu'il s'agira de construire la structure de variété bimodelée de Ω_1)



On notera $\mathbb{E}_1^p$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}^p$ formé des éléments X tels que

$$X(O) = X(L) = O$$

$\mathbb{F}_{1X}^p$ le sous-espace vectoriel $\mathbb{F}_X^p \cap \mathbb{E}_1^p$ de $\mathbb{F}_X^p$, pour $p = +\infty$ on note $\mathbb{E}_1 = \mathbb{E}_1^\infty$, $\mathbb{F}_{1X} = \mathbb{F}_{1X}^\infty$.

Si $X_o \in \Omega_1$ on a :

$$\Omega_1 \subset (X_o + \mathbb{E}_1) \cap \Omega .$$

n°2. Le supplémentaire $\mathbb{H}_X$ de $\mathbb{F}^p_{1X}$ dans $\mathbb{F}^p_X$ (dim ξ finie)

En elle-même l'existence d'un supplémentaire de $\mathbb{F}^p_{1X}$ dans $\mathbb{F}^p_X$ lorsque la dimension de ξ est finie ne soulève aucune difficulté, la détermination effective d'un tel supplémentaire est cependant un peu délicate (rien ne permet d'affirmer qu'en général le système $x(0) = c_1$, $x(L) = c_2$, $x \in \mathbb{F}^p_X$ a une solution unique pour tous c_1 et $c_2 \in \xi$, c'est d'ailleurs inexact). Nous montrerons qu'on obtient toujours un supplémentaire de $\mathbb{F}^p_{1X}$ en projetant les applications affines sur $\mathbb{F}^p_X$ parallèlement à $\mathbb{G}^p_X$ et nous déterminerons des cas où cette projection réalise un isomorphisme. L'étude s'appuie essentiellement sur deux lemmes que nous allons d'abord établir.

Lemme 3 :

Si $X \in \Lambda$ n'est pas U-singulier il existe un nombre $\rho \in]0,1[$ et un ensemble $H \subset I$ de mesure non nulle tels que

$$|\langle X'(s) | U \rangle| < (1-\rho)\,|X'(s)| \qquad \text{pour } s \in H$$

Démonstration :

Soit H_n l'ensemble des $s \in I$ pour lesquels

$$|\langle X'(s) | U \rangle| < (1 - \tfrac{1}{n})\,|X'(s)|$$

Soit M l'ensemble des $s \in I$ pour lesquels $|\langle X'(s) | U \rangle| = |X'(s)|$, si $s \in M$ comme U est unitaire on a $X'(s) \in \mathbb{R}U$ de plus

$$M = I - \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} H_n$$

et l'un au moins H_{n_o} des ensembles H_n est de mesure non nulle (sinon $\bigcup_n H_n$ serait de mesure nulle, et l'on aurait $X'(s) \in \mathbb{R}U$ pp sur I contrairement à l'hypothèse). $H = H_{n_o}$ et $\rho = \frac{1}{n_o}$ vérifient les conclusions du lemme.

Soient $\mathbb{A}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ formé des applications affines (*).

$\mathbb{A}_o$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{A}$ formé des applications nulles pour $s = 0$.

$\mathbb{K}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{A}$ formé des applications constantes.

(*) On identifie A et jA E^p.

On a

(1) $\mathcal{A} = \mathbb{K} \oplus \mathcal{A}_o$ et $\pi_{\mathbb{F}_X} \mathcal{A} = \mathbb{K} \oplus \pi_{\mathbb{F}_X} \mathcal{A}_o$ pour $X \in \Lambda$

(la 1ère propriété est évidente, comme $\pi_{\mathbb{F}_X} \mathbb{K} = \mathbb{K}$ elle entraine $\pi_{\mathbb{F}_X} \mathcal{A} = \mathbb{K} + \pi_{\mathbb{F}_X} \mathcal{A}_o$ par ailleurs $\pi_{\mathbb{F}_X} a(0) = 0$ si $a \in \mathcal{A}_o$ donc $\mathbb{K} \cap \pi_{\mathbb{F}_X} \mathcal{A}_o = \{0\}$)

Remarquons aussi que

(2) Si $X \in \Lambda$ est U-singulier alors $\pi_{\mathbb{F}_X^p} \mathcal{A}_o = \{a \in \mathcal{A}_o \mid a : s \to sV, \langle V | U \rangle = 0\}$

$$\pi_{\mathbb{F}_X^p} A = \{a \in \mathcal{A} \mid \langle a(L) - a(0) | U \rangle = 0\} \quad (*)$$

Lemme 4 :

Si X n'est pas singulier alors l'application linéaire $\nu : \mathcal{A}_o \longrightarrow \mathcal{E}$ qui à $a \in \mathcal{A}_o$ associe $(\pi_{\mathbb{F}_X^p} a)(L)$ est injective. $(1 \leq p \leq +\infty)$

Si X n'est pas singulier et si dim $\mathcal{E}$ est finie alors ν est un isomorphisme.

Démonstration :

Soit $a \in \mathcal{A}_o$, $a \neq 0$ alors $a(s) = \frac{s}{L} V$ avec $V \in \mathcal{E}, V \neq 0$. D'après le lemme 3 il existe $H \subset I$ avec mesure de $H \neq 0$ et $\rho \in]0, 1[$ tels que :

$$|\langle X'(s) \mid \frac{V}{|V|} \rangle| < (1-\rho) \mid X'(s)|_{\mathcal{E}} \quad \text{pour} \quad s \in H \quad \text{donc}$$

$$|(\pi_{\mathbb{G}_X^p} a)(L)|_{\mathcal{E}} = |\int_I \langle X' \mid \frac{1}{L} V \rangle \frac{X'}{\hat{O}(X)} |_{\mathcal{E}} \leq \frac{1}{L} \int_I \frac{\langle X' | V \rangle}{|X'|}$$

$$\leq \frac{|V|}{L} \int_J (1-\rho) \chi_H + \chi_{I-H} = \frac{|V|}{L} \quad (L-\rho \chi \text{ mesure de } H)$$

$$< |V|_{\mathcal{E}} = |a(L)|_{\mathcal{E}}$$

Par suite $(\pi_{\mathbb{G}_X^p} a)(L) \neq a(L)$ donc

$$a \in \mathcal{A}_o \text{ et } a \neq 0 \implies (\pi_{\mathbb{F}_X^p} a)(L) \neq 0$$

ce qui établit la première assertion. La seconde assertion résulte du fait que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}_o$ ont même dimension.

Proposition 7 :

Si $\dim \mathcal{E}$ *est finie alors pour tout* $X \in \Lambda$, $p \in (0, +\infty)$

$$\mathbb{F}^p_X = \mathbb{F}^p_{1X} \oplus \pi_{\mathbb{F}^p_X} \mathbb{A} \qquad \text{(somme directe topologique)}$$

Démonstration :

Il est clair que tout $x \in \mathbb{F}^p_X$ *s'écrira de façon unique sous la forme* $x = z + h$ *avec* $z \in \mathbb{F}^p_{1X}$ $h \in \pi_{\mathbb{F}^p_X} \mathbb{A}$ *si et seulement si*

(*) $\forall x \in \mathbb{F}^p_X \ \exists h$ *unique* $\in \pi_{\mathbb{F}^p_X} \mathbb{A}$ *tel que* $h(0) = x(0)$ *et* $h(L) = x(L)$

Or

. Si X n'est pas singulier (*) résulte de la seconde propriété (1) et du lemme 4.

. Si X est U-singulier (*) résulte du fait que si $x \in \mathbb{F}^p_X$: $\langle x(L) - x(0) \mid U \rangle = 0$ *et alors* $\pi_{\mathbb{F}^p_X} \mathbb{A}$ *est l'ensemble des applications affines h qui vérifient*

$\langle h(L) - h(0) \mid U \rangle = 0$ *(propriété 2)).*

$\mathbb{F}^p_X$ *est donc somme directe de* $\mathbb{F}^p_{1X}$ *et* $\pi_{\mathbb{F}^p_X} \mathbb{A}$, *somme directe topologique puisque* $\pi_{\mathbb{F}^p_X} \mathbb{A}$ *est de dimension finie.*

Dans la suite nous poserons (*)

$$\mathbb{H}_X = \pi_{\mathbb{F}^p_X} \mathbb{A}$$

$$H^*_X = \begin{cases} \mathbb{H}_X \text{ si } X \text{ n'est pas singulier.} \\ \text{Sous-espace de } \mathbb{E}^p \text{ engendré par } \mathbb{H}_X \text{ et l'application } s \longrightarrow sU \\ \text{si } X \text{ est } U\text{-singulier.} \end{cases}$$

dans ces conditions :

(3) $\mathbb{F}^p_X = \mathbb{F}^p_{1X} \oplus \mathbb{H}_X$

(4) $\mathbb{E}^p = \mathbb{E}^p_1 \oplus \mathbb{H}^*_X = \mathbb{E}^p_1 \oplus \mathbb{A}$

Remarque :

Les résultats précédents permettent de construire une base de $\mathbb{F}_{1X}$ *de la manière suivante : Soit* $\mathcal{B} = \{r_\nu, \nu = 1, \ldots, n\}$ *une base de* $\mathcal{E}$.

(*) $\mathbb{H}_X$ *et* $\mathbb{H}^*_X$ *sont des espaces vectoriels de dimension finie et indépendants de p.*

. *Si* X *n'est pas singulier il existe une base de* $\mathbb{H}_X$ *formée :*
de n *applications* $\pi_{\mathbb{F}_X} a_\nu$ $(a_\nu \in \mathbb{A})$ *telles que* $(\pi_{\mathbb{F}_X} a_\nu)(0) = 0$,
$(\pi_{\mathbb{F}_X} a_\nu)(L) = r_\nu$,
de n applications $\pi_{\mathbb{F}_X} b_\nu$ $(b_\nu \in \mathbb{A})$ *telles que* $(\pi_{\mathbb{F}_X} b_\nu)(0) = r_\nu$,
$(\pi_{\mathbb{F}_X} b_\nu)(L) = 0$.

. *Si* X *est U-singulier on peut supposer que* $\{r_\nu | \nu = 1, \ldots n-1\}$ *engendre l'orthogonal de* U *dans* $\mathbb{E}$ *et* $U = r_n$; *il existe alors une base de* $\mathbb{H}_X$ *formée :*

de l'application constante $a_n : s \rightsquigarrow r_n$,

de n-1 applications $\pi_{\mathbb{F}_X} a_\nu$ $(a_\nu \in \mathbb{A})$ *nulles pour* $s = 0$ *et valant* r_ν *pour* $s = L$,

de n-1 applications $\pi_{\mathbb{F}_X} b_\nu$ $(b_\nu \in \mathbb{A})$ *valait* r_ν *pour* $s = 0$ *et nulles pour* $s = L$.

n°3. La sous-variété bimodelée Ω_1 de Ω :

Lorsque la dimension de $\mathbb{E}$ *est finie* $\mathbb{F}_X$ *est isomorphe au produit topologique* $\mathbb{F}_{1X} \times \mathbb{H}_X$, *par suite l'application*

$$(z, w) \rightsquigarrow \xi_X(z+w)$$

est un difféomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{F}_{1X} \times \mathbb{H}_X$ *sur* Ω_X *(cf Proposition 3) Nous allons montrer qu'il est possible, localement, d'exprimer* w *sous la forme* $\varphi(z)$ *de façon que le point* $\xi_X(z+\varphi(z))$ *décrive un voisinage dans* Ω_1 *de* $X \in \Omega_1$ *lorsque* z *décrit un voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{F}_{1X}$.

Proposition 8 :

Si $X \in \Omega_1$ *il existe un voisinage ouvert* $\mathcal{V}_X$ *de* 0 *dans* $\mathbb{F}_{1X}$ *et une application* $\varphi_X : \mathcal{V}_X \longrightarrow \mathbb{H}_X$ *infiniment différentiable et telle que*

. $\varphi_X(0) = 0$

. $z + w \in w_X, z \in \mathcal{V}_X$ *et* $\xi_X(z, w) \in \Omega_1 \iff w = \varphi_X(z)$

Démonstration :

La relation $\xi_X(z+w) \in \Omega_1$ *équivaut à*

$$\pi_{\mathbb{H}^*}(\xi_X(z+w) - X) = 0$$

en notant π_{H^*} *la projection de* $\mathbb{E}$ *sur* $\mathbb{H}_X^*$ *parallèlement à* $\mathbb{E}_1$ *pour* $z+w \in \omega_X$ *posons :*

$$g(z,w) = \pi_{\mathbb{H}^*}(\xi_X(z+w) - X)$$

g est infiniment différentiable et

$$\partial_{\mathbb{H}} g(z, w) = \pi_{H^*} \circ \xi'_X(z+w) \circ i_{\mathbb{H}}$$

en particulier pour $z = 0$, $w = 0$ *il vient*

$$\partial_{\mathbb{H}} g(0,0) = \pi_{\mathbb{H}^*} \circ i_{\mathbb{F}} \quad i_{\mathbb{H}} = \text{injection de } \mathbb{H}_X \text{ dans } \mathbb{H}_X^*$$

($i_{\mathbb{H}}$ = *injection de* $\mathbb{H}_X$ *dans* $\mathbb{F}_X$, $i_{\mathbb{F}}$ = *injection de* $\mathbb{F}_X$ *dans* $\mathbb{E}$)

Comme X *n'est pas singulier* $\partial_{\mathbb{H}} g(0, 0)$ *est inversible (cf n°2) la conclusion découle alors du théorème classique sur les fonctions définies implicitement dans les espaces de Banach.*

Définissons maintenant l'application $\lambda_X : \mathcal{V}_X \longrightarrow \mathbb{E}$ *par*

$$\lambda_X(z) = \xi_X(z + \varphi_X(z))$$

λ_X *est une application infiniment différentiable. De plus si l'on pose*

$$\Omega_{1X} = \lambda_X(\mathcal{V}_X) \subset \Omega_1 \cap \Omega_X$$

$\lambda_X : \mathcal{V}_X \longrightarrow \Omega_{1X}$ *est un homéomorphisme de* $\mathcal{V}_X$ *sur* Ω_{1X}, *ouvert de* Ω_1 *muni de la topologie induite par* $\mathbb{E}$, λ_X^{-1} *est la restriction à* Ω_{1X} *de* $\pi_{\mathbb{F}_1} \circ \pi_{\mathbb{F}}$

($\pi_{\mathbb{F}_1}$ = *projection de* $\mathbb{F}_X$ *sur* $\mathbb{F}_{1X}$ *parallèlement à* $\mathbb{H}_X$).

Démonstration de quelques formules

Nous allons déterminer les différentielles première et seconde de φ_X *et* λ_X *sur* $\mathcal{V}_X$; *la relation* $\pi_{\mathbb{H}}(\xi_X(z+\varphi_X(z)) - X) = 0$ *donne par différentiation :*

(1) $\quad \ell_X(z) \circ \varphi'_X(z) + \nu_X(z) = 0$

où l'on a posé

$$\ell_X(z) = \pi_{\mathbb{H}} \circ \xi'_X(z+\varphi_X(z)) \circ i_{\mathbb{H}} = \pi_{\mathbb{H}} \circ \partial_{\mathbb{H}} \xi_X(z+\varphi_X(z)) \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_X, \mathbb{H}_X)$$

$$\nu_X(z) = \pi_{\mathbb{H}} \circ \xi'_X(z+\varphi_X(z)) \circ i_{\mathbb{F}_1} = \pi_{\mathbb{H}} \circ \partial_{\mathbb{F}_1} \xi_X(z+\varphi_X(z)) \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_{1X}, \mathbb{H}_X)$$

avec $i_{\mathbb{F}_1}$ (resp : $i_{\mathbb{H}}$) = injection de $\mathbb{F}_{1X}$ (resp : $\mathbb{H}_X$) dans $\mathbb{F}_X$. Par une seconde différentiation

$$(2) \qquad \ell_X(z) \circ \varphi''_X(z) + \ell'_X(z)\,(.) \circ \varphi'_X(z) + \nu'_X(z) = 0$$

avec

$$\ell'_X(z)\,(z_1) = \pi_{\mathbb{H}} \circ \xi''_X(z+\varphi_X(z))\,(z_1 + \varphi'_X(z)\,(z_1))\,(i_{\mathbb{H}})$$

$$\nu'_X(z)\,(z_1) = \pi_{\mathbb{H}} \circ \xi''_X(z+\varphi_X(z))\,(z_1 + \varphi'_X(z)\,(z_1))\,(j_{\mathbb{F}_1})$$

Or pour $z \in \mathcal{O}_X$, $\ell_X(z)$ est un isomorphisme et l'on déduit de (1) et (2) que

$$(3) \qquad \varphi'_X(z) = -\ell_X^{-1}(z) \circ \nu_X(z)$$

$$(4) \qquad \varphi''_X(z) = +\ell_X^{-1}(z) \circ \ell'_X(z)\,(.) \circ \ell_X^{-1}(z) \circ \nu_X(z) - \ell_X^{-1}(z) \circ \nu'_X(z)$$

Pour l'application λ_X on trouve

$$(5) \qquad \lambda'_X(z) = \xi'_X(z+\varphi_X(z)) \circ (i_{\mathbb{F}_1} + \varphi'_X(z))$$

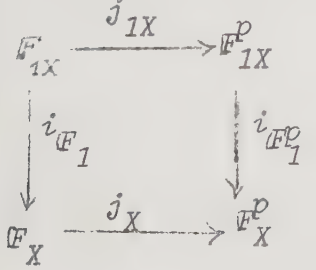
$$(6) \qquad \lambda''_X(z) = (i_{\mathbb{F}_1} + \varphi'_X(z))^{*}\, \xi'_X(z+\varphi_X(z)) + \xi'_X(z+\varphi_X(z)) \circ \varphi''_X(z)$$

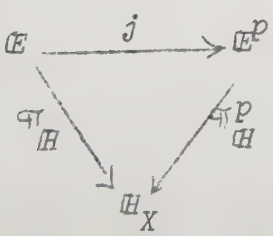
En particulier pour $z = 0$

$$\varphi'_X(0) = 0 \qquad \varphi''_X(0) = -\pi_{\mathbb{H}}\, i_{\mathbb{F}_1}^{*}\, \xi''_X(0)$$

$$\lambda'_X(0) = i_{\mathbb{F}_1} \qquad \lambda''_X(0) = \pi_{\mathbb{E}_1} \circ i_{\mathbb{F}_1}^{*} \circ \xi''_X(0)$$

est bidifférentiable de classe $\mathcal{C}^{\infty}$.





En posant :

$$\varphi^{\circ}_X(z) = -\ell_X(z)^{-1} \circ \pi_{\mathbb{H}}\, \xi^{\circ}_X(z+\varphi_X(z))$$

On vérifie à l'aide des deux diagrammes commutatifs ci-contre et des résultats du §2 n°2 que

$$\varphi'_X(z) = \varphi^{\circ}_X(z) \circ j_{1X}$$

ce qui exprime la bidifférentiabilité de φ puisque $\mathbb{H}_X$ est de dimension finie.

λ_X est la bidifférentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$.

En posant

$$\lambda_X^\circ(z) = \xi_X^\circ(z+\varphi_X(z)) \circ (i_{\mathbb{F}_1^p} + \varphi_X^\bullet(z))$$

on vérifie que

$$\lambda_X^\circ(z) \circ j_{1X} = j \circ \lambda_X'(z)$$

(En effet $\lambda_X^\circ(z) \circ j_{1X} = \xi_X^\circ(z+\varphi_X(z)) \circ (i_{\mathbb{F}_1^p} + \varphi_X^\circ(z)) \circ j_{1X}$

$= \xi_X^\circ(z+\varphi_X(z)) \circ j_X \circ (i_{\mathbb{F}_1} + \varphi_X'(z))$

$= j \circ \xi_X'(z+\varphi_X(z)) \circ (i_{\mathbb{F}_1} + \varphi_X'(z))$

$= j \circ \lambda_X'(z)$.)

Proposition 9 :

Ω_1 est une sous-variété bimodelée de Ω.

Démonstration :

Soit $X \in \Omega_1$, il faut mettre en évidence une δ-carte de Ω en X adaptée à Ω_1. Posons

$$\omega_{1X} = \{(z, w) \in \mathbb{F}_{1X} \times \mathbb{H}_X \text{ tels que } z + w + \varphi_X(z) \in \omega_X,\ z \in \mathcal{V}_X\}$$

ω_{1X} est un ouvert de $\mathbb{F}_{1X} \times \mathbb{H}_X$. Il existe une bijection θ_X telle que

$$\theta_X^{-1} : \omega_{1X} \longrightarrow \mathcal{O}_X : (z, w) \rightsquigarrow \xi_X(z + w + \varphi_X(z))$$

et

θ_X = restriction de $(\pi_{\mathbb{F}_1} \circ \pi_{\mathbb{F}}, \pi_{\mathbb{H}} \circ \pi_{\mathbb{F}} - \varphi_X \circ \pi_{\mathbb{F}_1} \circ \pi_{\mathbb{F}})$ à $\mathcal{O}_X$ (*)

Si l'on pose :

$$\Delta_{1X} = (\mathbb{F}_{1X}, \mathbb{F}_{1X}^p, j_{1X}), \quad \Delta_{2X} = (\mathbb{H}_X, \mathbb{H}_X, id)$$

alors $(\mathcal{O}_X, \theta_X, \Delta_{1X} \times \Delta_{2X})$ est une δ-carte de Ω adaptée à Ω_1.

(*) $\pi_{\mathbb{F}}$ = projection de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}_X$ parallèlement à G_X.

$\pi_{\mathbb{F}_1}$ (resp: $\pi_{\mathbb{H}}$) = projection de $\mathbb{F}_X$ sur $\mathbb{F}_{1X}$ (resp : $\mathbb{H}_X$) parallèlement à $\mathbb{H}_X$ (resp : $\mathbb{F}_{1X}$).

En effet, c'est une δ*-carte de* Ω *puisque pour tout* Y *tel que*

$$\Omega_Y \cap \Theta_X \neq \emptyset$$

$$\xi_Y \circ \theta_X^{-1} = \pi_{F_Y} \circ \theta_X^{-1} : (z, w) \rightsquigarrow \pi_{F_Y} \xi_X (z + w + \varphi_X(z))$$

est bidifférentiable et de classe C^∞*, pour les* δ*-couples* $\Delta_{1X} \times \Delta_{2X}$ *et* Δ_Y *de plus* θ_X *applique* $U_X \cap \Omega_1$ *sur* $V_X \times \{0\}$ *par définition*

(*) *On utilise les notations du* §2 *n°* 2

§5. LES VARIETES BIMODELEES $\Omega^{r,k}$ et $\Lambda_n^{r,k}$

Dans ce paragraphe on présente brièvement d'autres exemples de variétés bimodelées susceptibles d'être introduites en dynamique des milieux continus curvilignes lorsque de tels milieux sont doués de raideur ; milieux aptes à résister à des efforts de flexion et dont la description nécessite les dérivées d'ordre > 1 de la fonction $X : (0, L) \longrightarrow \mathcal{E}$ qui représente la position (cf §1 n° 1)

n°1. Notations :

I, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^0$, p, q, $\mathbb{E}^p$, $\mathbb{E}$ ont mêmes significations que dans le §1 n° 2 k = entier ≥ 2 . $r \in (1, +\infty)$

$\mathbb{E}^{r,k}$ = espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) formé des applications continues $X : I \longrightarrow \mathcal{E}$ dont la dérivée $X^{(k)}$ (au sens des distributions) $\in \mathbb{L}^r_{\mathcal{E}}(I)$

Pour $0 \leq h \leq k-1$ $X^{(h)}$ est alors une fonction continue. Muni de la norme

$$||X|| = \text{Max}\ (|X(0)|, |X'(0)|, \ldots, N_r(X^{k}))$$

$\mathbb{E}^{r,k}$ est un espace de Banach.

$j : \mathbb{E}^{r,k} \longrightarrow \mathbb{E}^p$ injection naturelle (linéaire continue)

$S^{r,k}$ = algèbre sur $\mathbb{R}$ formée des applications $u \in \mathcal{E}(I)$ telles que $u^{(k-1)} \in L^r(I)$.

Muni de la norme

$$|u| = \text{Max}\ (|u(0)|, |u'(0)|, \ldots, N_r(u^{(k-1)})$$

S est un espace de Banach.

e = applications $s \rightsquigarrow 1$ (identité de S)

$B_p : \mathbb{E}^{r,k} \times \mathbb{E}^p \longrightarrow L^p(I)$ application bilinéaire continue définie par

$$B_p(X, Y) = \langle X' \mid Y' \rangle$$

$B : \mathbb{E}^{r,k} \times \mathbb{E}^{r,k} \longrightarrow S^{r,k}$ application bilinéaire continue définie par

$$B(X, Y) = \langle X' \mid Y' \rangle$$

$\underset{\sim}{Q} : \mathbb{E}^{r,k} \longrightarrow S^{r,k}$ application quadratique associée à B.

On note $\mathbb{P}$ *le cône positif de* $S^{r,k}$, $\overset{o}{\mathbb{P}}$ *sont intérieur ;* $\overset{o}{\mathbb{P}}$ *est formé des éléments positifs et inversibles dans* $S^{r,k}$.

Définition 7 :

L'espace des configurations d'un milieu curviligne inextensible doué de raideur est l'ensemble

$\Omega^{r,k} \equiv \Omega$ *formé des* $X \in \mathbb{E}^{r,k}$ *tels que* $\underset{\wedge}{O}(X) = e$

Définition 8 :

L'espace des configurations d'un milieu curviligne extensible doué de raideur est l'ensemble $\Lambda^{r,k} \equiv \Lambda$ *formé des* $X \in \mathbb{E}^{r,k}$ *tels que*

$\underset{\wedge}{O}(X) \in \overset{o}{\mathbb{P}}$.

Ces deux définitions sont des cas particuliers de la définition générale suivante :

Définition 9 :

Soient η *un ouvert de* I *et* $L^{r,k}_{\eta}$ *la partie de* $S^{r,k}$ *formée des applications nulles sur* $I - \eta$. *L'espace des configurations d'un milieu curviligne partiellement extensible doué de raideur est l'ensemble*

$\Lambda^{r,k}_{\eta} \equiv \Lambda_{\eta}$ *formé des* $X \in \mathbb{E}^{r,k}$ *tels que*

- $\underset{\wedge}{O}(X) \in \overset{o}{\mathbb{P}}$
- $\underset{\wedge}{O}(X) \in e + \mathbb{L}^{r,k}_{\eta}$

(La définition 7 correspond à $\eta = \emptyset$, *la définition 8 à* $\eta = I$ *)*
On pose $\Lambda_I = \Lambda$.

n°2. La structure de variété bimodelée de $\Omega \equiv \Omega^{r,k}$

On définit, pour $X \in \Lambda^{r,k}$

$\mathbb{F}^p_X$ = *sous-espace vectoriel de* $\mathbb{E}^p$ *formé des* x *tels que* $B_p(X,x) = 0$

$\mathbb{G}^p_X$ = *sous-espace vectoriel de* $\mathbb{E}^p$ *formé des* y *tels que*

$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad \exists u \in L^p(I) \text{ tel que } y' = uX'.$$

$\mathbb{F}^{r,k}$ = *sous-espace vectoriel de* $\mathbb{E}^{r,k}$ *formé des* x *tels que* $B(X,x) = 0$

$G_X^{r,k}$ = sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}^{r,k}$ formé des y tels que

$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad \exists u \in S^{r,k} \quad \text{tel que} \quad y' = uX'.$$

$$\alpha_X^p : \mathbb{E}^p(I) \longrightarrow G_X^p : u \rightsquigarrow \int_0 uX'$$

$$\alpha_X : S \longrightarrow G_X^{r,k} : u \rightsquigarrow \int_0 uX'$$

α_X^p et α_X sont des isomorphismes d'espaces vectoriels topologiques.

Proposition 9 :

Pour $X \in \Lambda$, $\mathbb{E}^p = \mathbb{F}_X^p \oplus G_X^p$, $\mathbb{E}^{r,k} = \mathbb{F}_X^{r,k} \oplus G_X^{r,k}$

(sommes directes topologiques)

. L'application $(x, u) \rightsquigarrow X = X_o + x + \alpha_{X_o}(u)$ est un isomorphisme de $\mathbb{F}_{X_o}^{r,k} \times S^{r,k}$ sur $\mathbb{E}^{r,k}$

La démonstration est analogue à celle des propositions 1 et 2 du §2.
Les projecteurs relatifs à ces sommes directes sont donnés par

$$\Pi_{G_{X_o}^p}(X) = \alpha_{X_o}^p \left(\frac{B_p(X, X_o)}{\hat{Q}(X_o)} \right)$$

$$\Pi_{G_{X_o}^{r,k}}(X) = \alpha_{X_o} \left(\frac{B(X, X_o)}{\hat{Q}(X_o)} \right)$$

On construit alors les cartes de Ω un procédé analogue à celui du §2 n°2.
Si X et $X_o \in \Omega$, $x \in \mathbb{F}_{X_o}^{r,k}$, $u \in S^{r,k}$, les propriétés :

(1) $X = X_o + x + \alpha_{X_o}(u) \in \Omega$,

(2) $e - \hat{Q}(x) \in \mathbb{P}$ et $\exists \varepsilon : I \longrightarrow R$ tel que $\varepsilon^2 = e$ et $u = u_\varepsilon(x) = -e + \varepsilon (e - \hat{Q}(x))^{1/2}$,

sont équivalentes et il en va de même, dans ces conditions, pour les propriétés

(4) $B(X_o, X)$ est inversible dans $S^{r,k}$.

(5) $B(X_o, X) \in \overset{o}{\mathbb{P}}$,

(6) $e - \hat{Q}(x) \in \overset{o}{\mathbb{P}}$,

qui chacune entraine

(7) $\varepsilon = e$ ou $-e$.

En introduisant les ensembles

$$\omega_{X_o} = \{x \in \mathbb{F}^{r,k}_{X_o} \mid e - \underset{\wedge}{0}(x) \in \overset{\circ}{\mathbb{P}}\} \quad \text{(ouvert de } \mathbb{F}^{r,k}_{X_o}\text{)}$$

$$\Omega^{\varepsilon}_{X_o} = \{ X \in \Omega \mid \varepsilon\, B(X_o, X) \in \overset{\circ}{\mathbb{P}}\} \quad \text{(ouvert de } \Omega \text{ muni de la topologie induite par } \mathbb{E}^{r,k}\text{)}$$

et les applications

$$\xi^{\varepsilon}_{X_o} : \omega_{X_o} \longrightarrow \Omega^{\varepsilon}_{X_o} : x \rightsquigarrow X_o + x + \alpha_{X_o}(u_{\varepsilon}(x)) = \xi^{\varepsilon}_{X_o}(x)$$

on a la

Proposition 10 :

$\xi^{\varepsilon}_{X_o}$ *est un homéomorphisme de* ω_{X_o} *sur* $\Omega^{\varepsilon}_{X_o}$

$\zeta^{\varepsilon}_{X_o} = (\xi^{\varepsilon}_{X_o})^{-1}$ *est la restriction de* $\mathbb{F}^{r,k}_{X_o} - X_o(0)$ *à* Ω_{X_o}

(Ω *est muni de la topologie induite par* $\mathbb{E}^{r,k}$)

On pose maintenant

$$\Delta = (\mathbb{E}^{r,k}, \mathbb{F}^{p}, j) \quad , \quad \Delta_{X_o} = (\mathbb{F}^{r,k}_{X_o}, \mathbb{F}^{p}_{X_o}, j_{X_o})$$

Proposition 11 :

L'application $\xi^{\varepsilon}_{X_o} : \omega_{X_o} \longrightarrow \mathbb{E}$ *est infiniment différentiable et bidifférentiable de classe* $\mathcal{C}^{\infty}$ *pour les* δ*-couples* Δ_{X_o} *et* Δ.

Les démonstrations de ces deux propositions ainsi que les formules définissant $\xi^{\varepsilon'}_{X_o}$, $\xi^{\varepsilon o}_{X_o}$ *sont analogues à celles du §2.*

La structure de variété bimodelée de $\Omega^{r,k}$ *est déterminée par le* δ*-atlas*

$$\mathcal{A}^{p,r,k} = \{(\Omega_\alpha, \zeta_\alpha, \Delta_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$$

où $\{X_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{I}\}$ *est une famille de points de* Ω *telle que les* $\Omega_\alpha = \Omega^{\varepsilon}_{X_\alpha}$ *recouvrent* Ω, $\omega_\alpha = \omega_{X_\alpha}$, $\xi_\alpha = \xi^{\varepsilon}_{X_\alpha} : \omega_\alpha \longrightarrow \Omega_\alpha$, $\zeta_\alpha = \xi_\alpha^{-1}$ *(les nombres* p, r, k *intervenant dans* Δ_α *sont supposés fixés). Avec les propositions 10 et 11 on vérifie aisément pour* $\mathcal{A}^{p,r,k}$ *les propriétés caractérisant les* δ*-atlas. On a ainsi défini sur* Ω *une structure de variété bimodelée de classe* $\mathcal{C}^{\infty}$ *dans la catégorie* $\boxed{+}$ *de* δ*-couples telle que* $\boxed{1}$ *(resp.* $\boxed{2}$*) = catégorie des espaces de Banach (resp : catégorie des espaces de Banach réflexifs si* $1 < p < +\infty$).

n°3. La structure de variété bimodelée de $\Lambda_\eta \equiv \Lambda_\eta^{r,k}$

Cette structure est mise en évidence par un procédé analogue à celui du §3 on pose (notations indépendantes du n°2) pour $X_o \in \Lambda_\eta$, $\varepsilon = \pm e$

$\omega_{X_o} = \{(x,\tau) \in \mathbb{F}^{r,k}_{X_o} \times (e+\mathbb{L}^{r,k}_\eta) \mid \tau - \hat{O}(x) \in \overset{o}{\mathbb{P}}\}$ *ouvert de* $\mathbb{F}^{r,k}_{X_o} \times (e+\mathbb{L}^{r,k}_\eta)$

$\Lambda^\varepsilon_{\eta X_o} = \{X \in \Lambda_\eta \mid \varepsilon\, B(X_o, X) \in \overset{o}{\mathbb{P}}\}$ *ouvert de* Λ_η *muni de la topologie induite par* $\mathbb{E}^{r,k}$,

$\xi^\varepsilon_{X_o} : \omega_{X_o} \longrightarrow \Lambda^\varepsilon_{\eta X_o} : (x,\tau) \rightsquigarrow X_o + x + \alpha_{X_o}(u_\varepsilon(x,\tau)) = \xi^\varepsilon_{X_o}(x,\tau)$

où $u_\varepsilon(x,\tau) = -e + \varepsilon \left(\dfrac{\tau - \hat{O}(x)}{\hat{O}(X_o)} \right)^{1/2}$.

Proposition 12 :

$\xi^\varepsilon_{X_o}$ *est un homéomorphisme de* ω_{X_o} *sur* $\Lambda^\varepsilon_{\eta X_o}$

$(\xi^\varepsilon_{X_o})^{-1}$ *est la restriction de* $(\mathrm{pr}_{\mathbb{F}^{r,k}_{X_o}} - X_o(0), \hat{O})$ *à* $\Lambda^\varepsilon_{\eta X_o}$

On pose $\Delta_{X_o} = (\mathbb{F}^{r,k}_{X_o} \times \mathbb{L}^{r,k}_\eta, \mathbb{F}^p_{X_o} \times \mathbb{L}^p_\eta, j_{X_o} \times \ell)$

$\Delta = (\mathbb{E}^{r,k}, \mathbb{E}^p, j)$

où $j : \mathbb{E}^{r,k} \longrightarrow \mathbb{E}^p$ *est l'injection naturelle ,*

$j_{X_o} : \mathbb{F}^{r,k}_{X_o} \longrightarrow \mathbb{F}^p_{X_o}$ *la restriction de* j *à* $\mathbb{F}^{r,k}_{X_o}$,

ℓ = *injection naturelle de* $\mathbb{L}^{r,k}_\eta$ *dans* $\mathbb{L}^p_\eta$.

($\mathbb{L}^p_\eta$ = *sous-espace de* $\mathbb{L}^p(I)$ *formé des classes d'applications nulles sur* $I \div \eta$), Δ *et* Δ_{X_o} *sont des* δ*-couples stricts d'espaces de Banach.*

Proposition 13 :

L'application $\xi^\varepsilon_{X_o} : \omega_{X_o} \longrightarrow \mathbb{E}^{r,k}$ *est infiniment différentiable et et bidifférentiable de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *(pour les* δ*-couples* Δ_{X_o} *et* Δ)

Les démonstrations de ces deux propositions ainsi que les formules donnant $\xi^{\varepsilon\,\prime}_{X_o}$ *et* $\xi^{\varepsilon\,\circ}_{X_o}$ *sont analogues à celles du §3.*

La structure de variété bimodelée de $\Lambda_\eta^{r,k}$ *est déterminée par le* δ*-atlas*

$$\mathcal{B}^{p,r,k} = \{(\Lambda_{\eta,\alpha}, \zeta_\alpha, \Delta_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{J}\}$$

où $\{X_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{J}\}$ *est une famille de points de* Λ_η *telle que les* $\Lambda_{\eta,\alpha} = \Lambda_\eta^{e_{X_\alpha}}$ *recouvrent* Λ_η, $\omega_\alpha = \omega_{X_\alpha}$, $\xi_\alpha = \xi^{e_\eta}_{X_\alpha} : \omega_\alpha \longrightarrow \Lambda_{\eta,\alpha}$, $\zeta_\alpha = \xi_\alpha^{-1}$ *(les nombres* p,r,k *intervenant dans* Δ_α *sont fixés). On vérifie aisément les propriétés caractérisant les* δ*-atlas. On a ainsi défini sur* Λ_η *une structure de variété bimodelée de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *dans la catégorie* $\boxed{+}$ *de* δ*-couples telle que* $\boxed{1}$ *(resp :* $\boxed{2}$*) = catégorie des espaces de Banach (resp : catégorie des espaces de Banach réflexifs si* $1 < p < +\infty$*).*

CHAPITRE III

APPLICATIONS A LA DYNAMIQUE ANALYTIQUE DES FILS

n° 1. Fils inextensibles et sans raideur.

La mécanique des fils inextensibles et sans raideur est un exemple de théorie d'un milieu continu soumis à des liaisons et pour lequel un développement complet de la dynamique analytique n'est possible que dans le cadre des structures de variétés bimodelées. La variété de Banach Ω, sous-jacente à la variété bimodelée du chapitre II, §2, est en effet non réflexive et la mise sous forme Hamiltonienne des équations, selon les méthodes de Marsden, en usant d'une structure symplectique sur $T'\Omega$ n'est pas possible.

L'espace des configurations d'un fil inextensible sans raideur est la variété bimodelée Ω (Chapitre II, §2) avec p fixé, ou bien si des liaisons aux deux extrémités sont imposées, la sous-variété bimodelée Ω_1 de Ω (Chapitre II, §4). Pour développer la dynamique analytique selon le schéma général du Chapitre I, §4, il faut préciser

- La nature de l'espace $\mathcal{M}$ et de l'application $\tau : \tilde{T}\Omega \longrightarrow \mathcal{M}$,
- L'expression de l'énergie cinétique $K : \tilde{T}\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$,
- Le travail des forces appliquées au milieu continu (forme Q).

Nous utiliserons ici largement les isomorphismes mis en évidence au Chapitre II, §2, n° 3 considérés comme des identifications ; par exemple

$$T\Omega \tilde{\simeq} \{(X,U) \mid X \in \Omega,\ U \in \mathbb{F}_X\}$$
$$\tilde{T}\Omega \tilde{\simeq} \{(X,V) \mid X \in \Omega,\ V \in \mathbb{F}^p_X\}$$

1°) Hypothèses de l'énergie cinétique incomplète.

On donne μ, mesure positive sur $\dot{I} = (0,L)$ (répartition de de masse du fil) et

(1) $\mathcal{M}_\mathcal{D} = L^2_{\mathcal{E}}(\mathcal{I};\mu)$, $\tau : \tilde{T}\Omega \longrightarrow \mathcal{M}_\mathcal{D} : (X,V) \rightsquigarrow$ "classe de $V'' \in L^2_{\mathcal{E}}(\mathcal{I};\mu)$.

(2) $\mathbb{K} : \tilde{T}\Omega \longrightarrow \mathbb{R} : (X,V) \rightsquigarrow \frac{1}{2}\int < V(S) \mid V(S) > d\mu(S)$.

Avec ces hypothèses, les conditions de dualité (faible ou forte) ne sont pas vérifiées ; la transformation $D : \tilde{T}\Omega \longrightarrow \tilde{T}'\Omega$ *qui est définie par*

$$D(X,V) : (X,U) \rightsquigarrow \int < V(s)\ U(s) > d\mu(s) \qquad U \in \mathbb{F}^p_X$$

n'est évidemment pas bijective.

2°) Hypothèses de l'énergie cinétique complète.

On donne deux constantes $\rho>0$ *et* $\sigma>0$ *(représentant respectivement une masse linéique et un moment d'inertie linéique) et :*

(3) $\mathcal{M}_\mathcal{D} = \mathbb{E}^{2,(*)}$ $\tau : \tilde{T}\Omega \longrightarrow \mathcal{M}_\mathcal{D} : (X,V) \rightsquigarrow V$

(4) $\mathbb{K} : \tilde{T}\Omega \longrightarrow \mathbb{R} : (X,V) \rightsquigarrow \frac{1}{2}\int <V(s) \mid V(s)> \rho\, ds + \frac{1}{2}\int <V'(s) \mid V'(s)> \sigma\, ds$

Proposition 1 :

Si $\mathbb{K}$ *est l'énergie cinétique définie par (4) alors, pour toute forme semi-basique* Θ *de première espèce sur* $\tilde{T}\Omega$ *le système mécanique* $(\mathbb{K},\Theta)$ *sur* Ω *vérifie les conditions de dualité forte.*

Démonstration :

Dans les conditions de (3) et (4) l'application $D : \tilde{T}\Omega \longrightarrow \tilde{T}'\Omega$ *est*

$$D(X,V) : (X,U) \rightsquigarrow \rho\int <V(s) \mid U(s)> ds + \sigma \int < V'(s) \mid U'(s)> ds \qquad U \in \mathbb{F}^2_X$$

et c'est un isomorphisme car la forme bilinéaire sur $\mathbb{E}^{\mathcal{E}} \times \mathbb{E}^{2}$

$$(V,U) \rightsquigarrow \rho\int < V(s) \mid U(s) > ds + \sigma \int < V'(s) \mid U'(s) > ds$$

détermine sur $\mathbb{E}^2$ *une structure hilbertienne équivalente à celle de* $\mathbb{E}^2$ *(définie par la forme bilinéaire correspondant au cas ou* $\sigma = \rho = 1$*).*

Remarques :

(a) Le résultat vaut plus généralement si $\mathbb{K}$ *est une forme quadratique associée à une forme bilinéaire sur* $\mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2$ *définissant une structure hilbertienne équivalente à la structure naturelle de* $\mathbb{E}^2$.

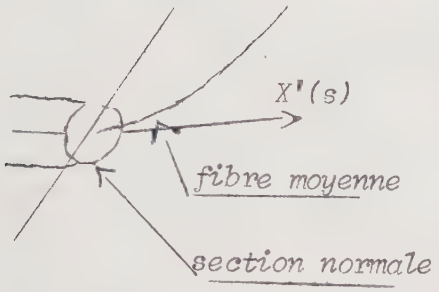
(b) La description des masses inertes d'un milieu continu curviligne dans les hypothèses de l'énergie cinétique incomplète est en fait

---

(*) C'est-à-dire qu'avec les notations du Chapitre II : $p = 2$.

la plus grossière que l'on imagine.

Si l'on considère que le fil doit être en réalité décrit par sa "fibre moyenne" inextensible et des sections normales à cette fibre restant normales dans toutes les configurations (Hypothèse de Navier Bernoulli généralisée) on est conduit à considérer que chaque élément du milieu continu compris entre deux sections normales "voisines" a une masse "ρds" et un tenseur d'inertie "$\mathcal{I} ds$". L'énergie cinétique (4) correspond au cas où $\mathcal{I}$ est le tenseur associé à l'opérateur linéaire $\sigma \times$ (Projection de $\mathcal{E}$ sur l'orthogonal de $X'(s)$) : on néglige donc l'inertie autour de la fibre moyenne.



Il est remarquable que ce soit cette description plus réaliste des inerties du milieu continus qui, en permettant de satisfaire la condition de dualité forte, rende possible le développement de la dynamique hamiltonienne.

Expressions de la forme $\mathcal{Q}$.

L'espace total du fibré $\tilde{p}_\Omega^* \mathcal{V}(\Omega)$ s'identifie à

$$\{(X,V,U) \mid (X,V) \in \tilde{T}\Omega,\ (X,U) \in T\Omega\}$$

L'espace total du fibré $\tilde{p}_\Omega^* \mathcal{V}'(\Omega)$ s'identifie à

$$\{(X,V,\Phi) \mid (X,V) \in \tilde{T}\Omega,\ (X,\Phi) \in T'\Omega\} \quad (*)$$

Les sections $\mathcal{Q}$ du fibré $\tilde{p}_\Omega^* \mathcal{V}'(\Omega)$ dual de $\tilde{p}_\Omega^* \mathcal{V}(\Omega)$ représentant le travail des forces appliquées au milieu continu peuvent avoir par exemple les expressions suivantes :

(5) Travail d'un champ de forces $F : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ (forces de pesanteur par exemple) $(**)$

$$< Q(X,V),\ (X,U) > = \int < F \circ X(s) \mid U(s) > d\mu(s)$$

(forces de masses)

(*) $T'\Omega$ s'identifie à $\{(X,\Phi) \mid X \in \Omega,\ \Phi \in \mathbb{F}'_X$ dual de $\mathbb{F}_X\}$

(**) Bien entendu, F et $\mathcal{J}$ peuvent aussi dépendre du temps.

ou bien

$$< Q(X,V),\ (X,U) > = \int_{\mathbb{I}} < FoX(s) \mid U(s) > ds$$

(6) Travail d'un champ de forces dérivant d'un potentiel

$\mathcal{G}^e : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ (*)

$< Q(X,V),\ (X,U) > = -\int \mathcal{G}^e{}'(X(s))(U(s))du(s))$ (forces de masses)

ou bien

$$< Q(X,V),\ (X,U) > = -\int_{\mathbb{I}} \mathcal{G}^e{}'(X(s))(U(s))ds$$

Dans ces conditions, si l'on définit $\mathcal{GG}^e : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{GG}^e(X) = \int \mathcal{G}^e(X(s))\ du(s) \quad (\text{resp} : \int_{\mathbb{I}} \mathcal{G}^e(X(s))ds)$$

$\mathcal{GG}^e$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$< Q(X,V),\ (X,U) > = d\,\mathcal{GG}^e(X,U)$$

(7) Travail de forces "hydrodynamique".

On donne un champ $W_f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ et une fonction $F : \Sigma \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ (Σ = sphère de rayon unité dans $\mathcal{E}$) et l'on prend

$$< Q(X,V),\ (X,U) > = \int_{\mathbb{I}} < F(X'(s),\ V(s) - W_f(X(s)))\mid U(s) > ds$$

Le travail des forces de traînée hydrodynamique sur un câble plongé dans un fluide en mouvement dont le champ des vitesses est W_f est de cette forme. Plus généralement, on peut d'ailleurs considérer des expressions de travail de la forme

(8) $$< Q(X,V),(X,U) > = \int_{\mathbb{I}} < F(X,V)(s) \mid U(s) > ds + \int_{\mathbb{I}} < G(X,V)(s) \mid V(s) > ds$$

où G peut être considéré comme une "densité de couple" fonction de la vitesse de la particule d'abscisse curviligne s (il faut que $G(X,V) \in L^q_{\mathcal{E}}(\dot{I})$ pour $(X,V) \in \tilde{T}\Omega$ si $\mathcal{N} = \mathbb{E}^p$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

(9) *Travail de forces appliquées aux extrémités du fil.*

$$< Q(X,V),(X,U) > = < R_o(X,V) \mid U(o) > + < R_1(X,V) \mid U(L) >$$

où R_o *et* R_1 *sont des applications de* $\mathcal{T}\Omega$ *dans* $\mathcal{E}$.

Dans les problèmes pratiques Q *est d'ailleurs souvent une somme de formes des types (5), ..., (9).*

Les équations de la dynamique analytique.

Si l'on cherche à déterminer un mouvement $t \rightsquigarrow M(t) \in \Omega$ *où*

- M *est faiblement pseudo-différentiable d'un intervalle* $\mathcal{I}$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* Ω.
- $\zeta \tilde{T} M : \mathcal{I} \rightsquigarrow \mathcal{M}_\zeta$ *est faiblement dérivable au sens suivant*

  $\forall t \in \mathcal{I}$, $\forall U \in \mathbb{F}_{M(t)}$ *la dérivée* $\Gamma(t) \in \mathbb{F}_{M(t)}'$ *définie par*

(10)
$$\frac{d}{dt} \int < \dot{M}(t)(s) \mid U(s) > d\mu(s) = < \Gamma(t), U > \quad (*)$$

  (resp : $\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{I}} <\dot{M}(t)(s) \mid U(s)>\rho ds + \int_{\mathbb{I}} <\dot{M}'(t)(s) \mid U'(s)>\sigma ds\right) = <\Gamma(t) \mid U>$)

  existe.
- *Les quotients* $\frac{1}{h}(\dot{M}(t+h)-\dot{M}(t))$ *sont bornés pour* h *assez petite* $\neq 0$.

Alors les équations du mouvement écrites dans une δ*-carte* $c = (\Omega_X, \xi_X^{-1}, \Delta_X)$ *de* Ω *(cf. Chapitre II, §2) sont les équations de Lagrange généralisées du chapitre I, §4 :*

(11) $\frac{d}{dt}\, \partial_2 \mathbb{K}_c(q,\dot{q}) \circ j_X - \partial_1 \mathbb{K}_c(q,\dot{q}) = \mathcal{Q}_c(q,\dot{q})$ *où* $q \equiv q(t)$, $\dot{q} \equiv \dot{q}(t)$, $t \in \mathcal{I}$.

$M = \xi_X \circ q$ *avec* $q : \mathcal{I} \rightsquigarrow \mathbb{F}_X$, $\dot{q} = \frac{d}{dt} j_X \circ q$

$\mathbb{K}_c(x,w) = \mathbb{K}_o \xi_X^o(x)(w)$, $\mathcal{Q}_c(x,w) = \mathcal{Q}(\xi_X(x), \xi^o(x)(w)) \circ \xi_X'(x)$, $x \in \omega_X$, $w \in \mathbb{F}_X^p$.

(*) *Le symbole* $<.,.>$ *désigne ici la dualité entre* $\mathbb{F}_{M(t)}$ *et* $\mathbb{F}'_{M(t)}$ *identifiés à* $T_{M(t)}\Omega$ *et* $T'_{M(t)}\Omega$.

Si l'on est dans les hypothèses de l'énergie cinétique complète (3) et (4), la transformation de Legendre est un isomorphisme de $\widetilde{\mathcal{C}}(\Omega)$ *sur* $\mathcal{C}(\Omega)$ *dont l'expression locale dans* c *est*

$$(12)\quad D_c : (x,w) \rightsquigarrow (x, \partial_2 \mathbb{K}_c(x,w)) =$$

$$= (x, \rho \int_{\mathbb{I}} \langle \xi^o(x)(w) | \xi^o(x)(\cdot) \rangle + \sigma \int_{\mathbb{I}} \langle \xi^o(x)(w)' | \xi^o(x)(\cdot)' \rangle ds).$$

Par suite, si l'on introduit la fonction

$$(13)\quad p : \mathcal{D} \rightsquigarrow \mathbb{F}_X^{2\prime} : t \rightsquigarrow \partial_2 \mathbb{K}_c(q(t), \dot{q}(t))$$

les équations du mouvement s'écrivent sous forme hamiltonienne.

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\, {}^t j_X\, p(t) = -\partial_1 \mathbb{H}_c(q(t), p(t)) + \mathbb{F}_c(q(t), p(t)) \\ \dfrac{d}{dt}\, j_X\, q(t) = i_X\, \partial_2 \mathbb{H}_c(q(t), p(t)). \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \mathbb{H}_c(x,w') = \dfrac{1}{2}\, \mathbb{K}_c(D_c^{-1}(x,w')) \text{ (expression locale du Hamiltonien)} \\ \mathbb{F}_c(x,w') = \mathbb{Q}_c(D_c^{-1}(x,w')) \\ i_X : \mathbb{F}_X^{2\prime\prime} \longrightarrow \mathbb{F}_X^2 \text{ isomorphisme canonique du bidual de } \mathbb{F}_X^2 \\ \qquad\qquad \text{(réflexif) sur } \mathbb{F}_X^2. \end{cases}$$

Nous terminons ce n° 1 en remarquant que la possibilité d'obtenir un tel schéma pour la dynamique des fils inextensibles provient essentiellement de la considération de la structure de variété bimodelée de l'espace des configurations. Si l'on s'était limité à la seule considération de la structure de variété de Banach sous-jacente, on aurait du renoncer aux hypohhèses a priori (10) concernant la régularité des mouvements étudiés pour en adopter de plus fortes, et, d'autre part renoncer au schéma hamiltonien car le modèle de la variété Ω *n'est pas réflexif. En définitive, on n'aurait trouvé que les seules équations de Lagrange classiques :*

$$\frac{d}{dt}\, \partial_2 \mathbb{K}_c(q,q') - \partial_1 \mathbb{K}_c(q,q') = \mathbb{Q}_c(q,q') \quad q \equiv q(t), \quad q'(t) = \frac{d}{dt}\, q(t)$$

qui supposent des conditions de régularité a priori plus fortes que pour (11).

n° 2. Fils partiellement ou totalement extensibles.

L'espace des configurations est dans ce cas la variété bimodelée Λ_η (cf. Chapitre II, §3). On utilisera largement les isomorphismes mis en évidence au chapitre II, §3 :

$$T\Lambda_\eta \tilde{\to} \{(X,V) \mid X \in \Lambda_\eta,\ V \in \mathbb{E},\ (e-\chi_\eta)\ B(X,V) = 0\}$$

$$\mathfrak{T}\Lambda_\eta \tilde{\to} \{(X,W) \mid X \in \Lambda_\eta,\ W \in \mathbb{E}^p,\ (e-\chi_\eta)\ B_p(X,W) = 0\}$$

.1°) Hypothèses de l'énergie cinétique incomplète (analogues au cas du n° 1).

On donne μ mesure positive sur $\mathbb{I} = (0,L)$

(1) $\mathcal{M}_\mathcal{C} = L^2_\xi(I;\mu)$, $\tau : \mathfrak{T}\Lambda_\eta \longrightarrow \mathcal{M}_\mathcal{C} : (X,V) \rightsquigarrow$ "classe de $V'' \in L^2_\xi(\mathbb{I};\mu)$

(2) $\mathbb{K} : \mathfrak{T}\Lambda_\eta \longrightarrow \mathbb{R} : (X,V) \rightsquigarrow \frac{1}{2}\int < V(s) \mid V(s) > d\mu(s)$

Les conditions de dualité ne sont pas vérifiées.

.2°) Hypothèses de l'énergie cinétique complète.

Rappelons que l'on distingue dans le fil deux régions : la région $s \in \eta$ dans laquelle le fil est extensible et la région $s \in \mathbb{I} - \eta$ dans laquelle le fil est inextensible, si ρ_1 et σ_1 d'une part, ρ_2 et σ_2 d'autre part sont la masse linéique et le moment d'inertie transversal linéique dans chacune ee ces régions. (cf. remarque (b) du n° 1) on est conduit à

(3) $\mathcal{M}_\mathcal{C} = \mathbb{E}^2$, $\tau : T\Lambda_\eta \longrightarrow \mathcal{M}_\mathcal{C} : (X,V) \rightsquigarrow V$

(4) $\mathbb{K} : \mathfrak{T}\Lambda_\eta \longrightarrow \mathbb{R} : (X,V) \rightsquigarrow \frac{1}{2}\int_{\mathbb{I}} < V(s) \mid V(s) > (\rho_1 \chi_\eta(s) + \rho_2 (e-\chi_\eta)(s))\, ds$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{I}} < V'(s) \mid V'(s) > (\sigma_1 \chi_\eta(s) + \sigma_2 (e-\chi_\eta)(s))\, ds$$

$(\rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2 > 0)$.

Proposition 2 :

Si $\mathbb{K}$ est l'énergie cinétique complète d'un fil partiellement extensible alors pour toute forme semi-basique $\mathcal{Q}$ de première espèce sur $\mathfrak{T}\Lambda_\eta$ le système mécanique $(\mathbb{K},\mathcal{Q})$ vérifie les conditions du dualité forte.

Démonstration :

Analogue à la proposition 1.

Expressions de la forme $\mathcal{Q}$.

Cette expression doit contenir deux termes.

(a) Un terme $\mathcal{Q}_e$ correspondant au travail des forces extérieures qui peut être une somme de termes du type (5), (6), (7), (8), (9) du n° 1, avec des modifications évidentes ; par exemple les forces hydrodynamiques donnent un travail :

$$< \mathcal{Q}_e(X,V),(X,U) > = \int_{\mathbb{I}} < F(\frac{X'(s)}{Q(X)(s)^{1/2}},\ V(s) - W_f(X(s)))\ Q(X)^{1/2} ds$$

(b) Un terme correspondant au travail des forces intérieures et que nous écrirons sous la forme (*)

$$- < \mathcal{Q}_i(X,V),(X,U) > = - \int_{\mathbb{I}_\eta} \mathcal{C}(Q(X)-e,\ 2B(X,V))\ B(X,U)(s) ds$$

où $\mathcal{C} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dont le premier argument représente l'extension du fil, le second la vitesse d'extension du fil dans les régions où celui-ci est extensible, et la valeur est une force de tension dans le fil. L'expression de $\mathcal{C}$ traduit la loi de comportement du fil.

L'expression du travail total est :

$$\mathcal{Q}(X,V) = \mathcal{Q}_e(X,V) - \mathcal{Q}_i(X,V)$$

Si l'on choisit une δ-carte $c = (\Lambda_{\eta X}, \zeta_X, \Delta_X)$ de Λ_η le mouvement défini par $M : \mathcal{I} \rightsquigarrow \Lambda_\eta$ ($\mathcal{I}$ = intervalle de $\mathbb{R}$) et vérifiant (10) du n° 1 est déterminé par

$$M = \zeta_X \circ (q_1, q_2), \quad q_1 : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{F}_X, \quad q_2 : \mathcal{I} \longrightarrow e + \mathbb{L}_\eta$$

On posera (cf. notation du Chapitre II, §3)

$$\dot{q}_1 = \frac{d}{dt} j_X q_1, \qquad \dot{q}_2 = \frac{d}{dt} \circ q_2, \qquad \dot{q} = (q_1, q_2), \qquad \dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2)$$

(*) *On distingue la forme $\mathcal{Q}$ (lettre grasse) et $Q : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \dot{\mathbb{L}}^\infty(\mathbb{I})$*

Les équations du mouvement s'écrivent alors

$$\frac{d}{dt}\,\partial_w\,\mathbb{K}_c(q,\dot q)\;o\;j_X - \partial_x\,K_x(q,\dot q) = \mathbb{Q}_{cx}(q,\dot q)$$

$$\frac{d}{dt}\,\partial_r\,\mathbb{K}_c(q,\dot q)\;o\;\ell\;\; - \partial_2\,\mathbb{K}_c(q,\dot q) = \mathbb{Q}_c\;(q,\dot q)\quad q \equiv q(t),\quad \dot q \equiv \dot q(t)$$

Avec
$$\mathbb{K}_c((x,z),(w,r)) = \mathbb{K}(\xi_X(x,z),\ \xi^o_X(x,z)(w,r))$$
$$\mathbb{Q}_{cx}((x,z),(w,r)) = \mathbb{Q}(\xi_X(x,z),\ \xi^o_X(x,z)(w,r)\,|\,o\partial_1\xi_X(x,z)$$
$$\mathbb{Q}_c\;((x,z),(w,r)) = \mathbb{Q}(\xi_X(x,z),\ \xi^o_X(x,z)(w,r)\,|\,o\partial_2\xi_X(x,z)$$

Dans les hypothèses de l'énergie cinétique complète, l'expression locale de la transformation de Legendre est

$$D_c : ((x,z),(w,r)) \rightsquigarrow ((x,z),(\partial_w\,\mathbb{K}_c((x,z),(w,r)),\ \partial_r K_c((x,z),(w,r))))$$

et si l'on introduit

$$p = (p_1,p_2) : \mathcal{I} \rightsquigarrow \mathbb{F}^{2\prime}_X \times \mathbb{L}^{2\prime}_\eta : t \rightsquigarrow (\partial_w\,\mathbb{K}_c(q,\dot q),\ \partial_r\,\mathbb{K}_c(q,\dot q))$$

les équations du mouvement prennent la forme hamiltonienne :

$$\frac{d}{dt}\,{}^t j_X\,p_1(t) = -\,\partial_x\,\mathbb{H}_c(q(t),p(t)) + \mathbb{F}_{cx}(q(t),p(t))$$

$$\frac{d}{dt}\,{}^t\ell\;\;p_2(t) = -\,\partial_2\,\mathbb{H}_c(q(t),p(t)) + \mathbb{F}_{cz}(q(t),p(t))$$

$$\frac{d}{dt}\,j_X\,q_1(t) \;\; = \partial_w\,\mathbb{H}_c(q(t),p(t))$$

$$\frac{d}{dt}\,\ell\;\;q_2(t) \;\; = \partial_r\,\mathbb{H}_c(q(t),p(t))$$

où

$$\mathbb{H}_c((x,z),(w',r')) = \frac{1}{2}\,\mathbb{K}_c(D_c^{-1}((x,z)(w',r'))$$

$$\mathbb{F}_{cX}((x,z),(w',r')) = \mathbb{Q}_{cX}(D_c^{-1}((x,z)(w',r'))$$

$$\mathbb{F}_c\;((x,z),(w',r')) = \mathbb{Q}_{cz}(D_c^{-1}((x,z)(w',r'))$$

$i_X : \mathbb{F}^{2\prime\prime}_X \longrightarrow \mathbb{F}^2_X$, $h : \mathbb{L}^{2\prime\prime}_\eta \longrightarrow \mathbb{L}^2_\eta$ *isomorphismes canoniques.*

Nous terminerons ce n° 2 en remarquant que comme dans le cas des fils inextensibles, le schéma hamiltonien ne peut être obtenu que dans le cadre des structures de variétés bimodelées.

n° 3. Equations classiques de la dynamique des fils.

Nous allons montrer que les équations trouvées aux n° 1 et 2 contiennent le cas des équations classiques de la dynamique des fils. Comme les équations des n° 1 et 2 sont des formes équivalentes du principe des travaux virtuels abstrait posé au Chapitre I, §4, il suffit de montrer que ce principe redonne bien les équations classiques. Nous aurons besoin pour cela de deux lemmes.

Lemme 1 :

Soient $\eta \subset \dot{\mathbb{I}}$ *une partie mesurable,* $X \in \Lambda$, $f \in \mathbb{E}'$; *on désigne par* N_η *le sous-espace de* $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{I})$ *formé des "classes nulles sur* η*".*
Alors les propriétés

(a) $\forall U$ *vérifiant* $(e-\chi_\eta)\ B(X,U) = 0$: $f(U) = 0$.

(b) $\exists\, \theta \in N'_\eta$ *telle que* $f(U) = \theta((e-\chi_\eta)\ B(X,U))$

sont équivalentes.

En particulier si $\eta = \emptyset$ *on obtient l'équivalence de*

(a_o) $\forall U \in \mathbb{F}_X$: $f(U) = 0$

(b_o) $\exists\, \theta \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{I})'$ *telle que* $f(U) = \theta(B(X,U))$

Démonstration :

Le lemme est un cas particulier du principe des multiplicateurs de Lagrange répartis(*). *On peut en donner une démonstration directe ; soient*

$$\mathbb{F}_{X,\eta} = \{x \in \mathbb{E} \mid (e-\chi_\eta)\ B(X,x) = 0\}$$

$$\mathbb{G}_{X,\eta} = \{y \in \mathbb{E} \mid y(0) = 0,\ y' = u\,X' \text{ avec } u \in N_\eta\}$$

sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$, *munis de la topologie induite. On a :*

$$\mathbb{E} = \mathbb{F}_{X,\eta} \oplus \mathbb{G}_{X,\eta}$$

somme directe topologique dont les projecteurs associés sont

$$\mathbb{P}_G : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{G}_{X,\eta} : Y \rightsquigarrow \int_0 (e-\chi_\eta)\ \frac{B(X,Y)X'}{Q(X)}$$

$$\mathbb{P}_F = id - \mathbb{P}_G$$

(*) *Cf. Mme Blancheton II.*

De plus, l'application $\beta_X : \mathbb{N}_\eta \longrightarrow \mathbb{G}_{X,\eta} : u \rightsquigarrow \int_0 u \frac{X'}{Q(X)}$ est un isomorphisme puisque $Q(X)$ est inversible dans $\mathbb{L}^\infty(\dot{\mathbb{I}})$ et

$$\beta_X^{-1}(y) = B(X,y)$$

Or, dire que f est nulle sur $\mathbb{F}_{X,\eta}$ revient à dire que

$$f = f\big|_{\mathbb{G}_X} \circ \mathbb{P}_{\mathbb{G}}$$

mais en vertu de l'isomorphie de $\mathbb{N}_\eta$ et $\mathbb{G}_{X,\eta}$ la forme linéaire $f\big|_{\mathbb{G}_X}$ continue sur $\mathbb{G}_{X,\eta}$ s'écrit

$$f\big|_{\mathbb{G}_X} = \theta \circ \beta_X^{-1} \quad \text{avec} \quad \theta \in \mathbb{N}'_\eta$$

donc en définitive

$$f(U) = \theta \circ \beta_X^{-1} \circ \mathbb{P}_G(U) = \theta((e-\eta)\, B(X,U))$$

Remarque :

D'après le théorème de Hahn-Banach, on peut toujours supposer que $\theta \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{I})'$.

Le lemme suivant précise la nature du "multiplicateur" θ :

Lemme 2 :

Soit $\theta \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{I})'$ la forme linéaire définie dans le lemme 1.

(a) Pour que θ soit telle que $\theta(u) = \int_{\dot{I}-\eta} Tu$ avec $T \in L^1(I)$, il faut et il suffit que f soit continue sur $\mathbb{E}$ muni de la topologie faible $\sigma(\mathbb{E},\mathbb{E}^1)$.

(b) Pour que θ soit telle que $\theta(u) = \int_{\dot{\mathbb{I}}-\eta} Tu$ avec $T \in L^q(\dot{\mathbb{I}})$ $1 < q \leq +\infty$, il faut et il suffit que f soit continue sur $\mathbb{E}$ muni de la topologie induite par $\mathbb{E}^p$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Démonstration :

Remarquons d'abord que, d'une façon générale la forme bilinéaire sur $\mathbb{E}^p \times \mathbb{E}^q$.

$$(X,Y) \rightsquigarrow \int_{\mathbb{I}} (\langle X(s) | Y(s) \rangle + \langle X'(s) | Y'(s) \rangle)\, ds$$

met $\mathbb{E}^p$ et $\mathbb{E}^q$ en dualité $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, d'où la possibilité de définir

les topologies faibles $\sigma(E,E^1)$ *et* $\sigma(\mathbb{E}^p,\mathbb{E}^q)$.

La démonstration résulte alors du fait que

1°) $\beta_X : \mathbb{N}_\eta \longrightarrow \mathbb{G}_{X,\eta}$ *est un isomorphisme*

- *de* $\mathbb{N}_\eta$ *muni de la topologie induite par* $\sigma(\mathbb{L}^\infty(\mathbb{I}), \mathbb{L}^1(\mathbb{I}))$ *sur* $\mathbb{G}_{X,\eta}$ *muni de la topologie induite par* $\sigma(\mathbb{E},\mathbb{E}^1)$.
- *de* $\mathbb{N}_\eta$ *muni de la topologie induit par* $\mathbb{L}^p(\mathbb{I})$ *sur* $\mathbb{G}_{X,\eta}$ *muni de la topologie induite par* $\mathbb{E}^p$.

2°) $P_G : \mathbb{E} \longrightarrow G_{X_s}$ *est continue*

- *de* $\mathbb{E}$ *muni de la topologie* $\sigma(\mathbb{E},\mathbb{E}^1)$ *sur* $\mathbb{G}_{X,\eta}$ *muni de la topologie induite par* $\sigma(\mathbb{E},\mathbb{E}^1)$.
- *de* $\mathbb{E}$ *muni de la topologie induite par* $\mathbb{E}^p$ *sur* $G_{X,\eta}$ *muni de la topologie induite par* $\mathbb{E}^p$.

La relation $f = \theta \circ \beta_X^{-1} \circ P_G$ *montrer que les conditions sont nécessaires.*

La relation $\theta = f\big|_{G_{X,\eta}} \circ \beta_X$, *et les résultats classiques sur la dualité établissent que les conditions sont suffisantes.*

Ces lemmes étant acquis, considérons par exemple un fil partiellement extensible dont l'énergie cinétique est donnée par (cf. (4) du n° 2) (*)

$$K(X,V) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{I}} < V(s)\,|\,V(s) > \rho(s)ds \quad \frac{1}{2}\int_{\mathbb{I}} < V'(s)\,|\,V'(s) > \sigma(s)ds$$

et soumis à un champ de forces et des forces aux extrémités donnant un travail total :

$$< Q(X,V)\,|\,(X,U) > = \int_{\mathbb{I}} < F \circ X(s)\,|\,U(s)ds$$

$$+ < R_o(X,V)\,|\,U(0) > + < R_1(X,V)\ U(L) >$$

Si $\eta \subset \dot{\mathbb{I}}$ *représente la région où le milieu continu est extensible, le principe des travaux virtuels du chapitre I, §4 conduit aux équations du mouvement :*

$$\forall t \ , \quad \forall U \quad avec \quad (e-\chi_\eta)\ B(X,U) = 0 :$$

(*) $\rho(s) = \rho_1\ \chi_\eta(s) + \rho_2(e-\chi_\eta)(s)$; $\sigma(s) = \sigma_1\ \chi_\eta(s) + \sigma_2(e-\chi_\eta)(s)$

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_{\cup 1}(\langle \dot{M}(t)(s)\,|\,U(s)\rangle\rho(s)+\langle \dot{M}(t)'(s)\,|\,U'(s)\sigma(s)\rangle ds\Big)=$$

$$=-\int_{\cup\eta}\mathcal{C}(Q(M(t))(s))B(M(t),U)(s)ds$$

$$+\int_{\mathbb{I}}\langle F\circ M(t)(s)\,|\,U(s)\rangle ds+\langle R_o(M(t))\,|\,U(0)\rangle+\langle R_1(M(t)\,|\,U(L)\rangle$$

Si l'on suppose que l'on est dans les conditions du lemme 2, cette relation entraîne l'existence d'une fonction $T(t)\in L^q(\mathbb{I})$ *telle que* $\forall t,\ \forall U\in\mathbb{E}$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{I}}(\langle \dot{M}(t)(s)\,|\,U(s)\rangle\rho(s)+\langle \dot{M}(t)'(s)\,|\,U'(s)\rangle\sigma(s))ds$$

$$=-\int(\chi_\eta\,\mathcal{C}(Q(M(t)(s))+(e-\chi_\eta)\,T(t)(s))\,B(M(t),U)ds$$

$$+\int_{\mathbb{I}}\langle F\circ M(t)(s)\,|\,U(s)\rangle ds+\langle R_o(M(t))\,|\,U(0)\rangle+\langle R_1(M(t))\,|\,U(L)\rangle$$

On voit alors aisément que ces équations taaduisent sous une forme faible les équations classiques de la mécanique des fils, à savoir :

- *dans la région* $\mathbb{I}\div\eta$ *où le fil est inextensible, on a :*

$$\rho_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}M(t,s)-\sigma_1\frac{\partial^3}{\partial t^2\partial s}M(t,s)+F(M(t,s))=\frac{\partial}{\partial s}\Big(T(t,s)\frac{\partial M}{\partial s}(t,s)\Big)$$

(avec en plus $\left|\frac{\partial M}{\partial s}(t,s)\right|^2=1$*).*

- *dans la région* η *où le fil est extensible, on a :*

$$\rho_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}M(t,s)-\sigma_2\frac{\partial^3}{\partial t^2\partial s}M(t,s)+F(M(t,s))=\frac{\partial}{\partial s}\Big(\mathcal{C}(Q(M)(t,s))\frac{\partial M}{\partial s}(t,s)\Big)$$

- *aux extrémités, que nous supposerons être dans la région* η *pour fixer les idées :*

$$-\mathcal{C}(Q(M)(t,0))\frac{\partial M}{\partial s}(t,0)=R_o(M(t))$$

$$\mathcal{C}(Q(M)(t,L))\frac{\partial M}{\partial s}(t,L)=R_1(M(t)).$$

CHAPITRE IV

MECANIQUE ANALYTIQUE DES MILIEUX CONTINUS CURVILIGNES

Dans ce chapitre on se propose de montrer comment la mécanique des milieux continus curvilignes entre dans le cadre du schéma général du chapitre I §4. Un milieu continu curviligne peut être représenté comme un milieu continu tridimentionnel soumis à des liaisons internes : les déformations du milieu doivent être telles que des "sections planes" constituant , dans une configuration de réfèrence, une famille en correspondance biunivoque avec les points d'un segement $(0,L)$, subissent chacune un déplacement de solide indéformable. Cela conduit à décrire mathématiquement chaque configuration du milieu continu curviligne par une fonction $Z : (0,L) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathcal{E}^0)$ (groupe des déplacements de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}^0$). Pour que Z puisse représenter effectivement un milieu continu tridimentionnel il faut que cette fonction satisfasse notamment à une "condition de régularité". L'espace des configurations d'un milieu continu curviligne apparait ainsi comme une variété bimodelée entrant dans le cadre très général développé au Chapitre I §5. Pour des raisons de simplicité et surtout parcequ'ici la construction explicite d'un δ-atlas est très aisée, nous n'avons pas fait usage direct des notions extrèmement lourdes nécessaires à la construction des variétés bimodelées de sections d'espaces fibrés. La condition de régularité entraine que le premier modèle de cette variété bimodelée n'est pas réflexif.

Comme on le sait, le problème fondamental de la mécanique des milieux curvilignes consiste, connaissant les lois de comportement des milieux continus tridimentionnels, à déterminer les relations liant TZ à certaines contraintes de façon à obtenir une théorie donnant une approximation correcte de la théorie tridimentionnelle.

On peut ainsi réduire le problème de mécanique à la détermination de champs définis dans un espace à une dimension. Nous supposerons bien entendu que les lois de comportement du milieu curviligne sont données.

Un intérêt particulier de cette application du schéma du chapitre I §5 est de montrer, sur un exemple moins simple que celui des fils, comment s'introduisent l'espace $\mathcal{K}$ et l'application ξ et aussi d'introduire un "groupe de Lie bimodelé".

Pour la clarté de l'exposé on a d'abord entrepris de décrire ce qu'est l'aspect géométrique et mécanique de la question sans introduire les hypothèses d'analyse précises et la structure de variété bimodelée de l'espace des configurations.

Ce n'est qu'au paragraphe 3 que l'introduction de ces hypothèses et de cette structure placent la théorie dans un cadre vigoureux au point de vue de l'analyse fonctionnelle.

Précisons enfin que telle n'est pas ici notre intention de développer la dynamique analytique pour les milieux continus curvilignes les plus généraux ; (*)
le modèle physique choisi est en réalité très simple, cependant ce modèle commode est souvent utilisé en pratique. Le modèle unidimentionnel auquel les hypothèses du début du §1 conduisent ne doit d'ailleurs sa forme qu'à certaines de ces hypothèses et peut s'appliquer dans des conditions plus larges quant à la nature du milieu tridimentionnel schématisé par le milieu curviligne.

(*) Pour plus de détails on peut se reporter à l'article de Autmann paru dans le Handbuch der Physik Vol. VI a/2.

§1. Description géométrique d'un milieu continu curviligne.

n°1. Rappel de quelques propriétés du groupe de Lie des déplacements d'un espace affine euclidien (de dimension 3)

Avant d'entreprendre la description d'un milieu continu curviligne nous rappelons brièvement quelques propriétés du groupe de Lie $\mathbb{D}(\mathcal{E}^0)$ qui sont l'expression particulière de propriétés générales des groupes de Lie opérant dans une variété.

On note $\mathcal{E}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté

$\langle . , . \rangle$ *le produit scalaire de* $\mathcal{E}$, $\wedge$ *le produit vectoriel dans* $\mathcal{E}$,

$\mathbb{O}(\mathcal{E})$ *le groupe orthogonal de* $\mathcal{E}$,

$\mathcal{E}^0$ *un espace affine attaché à* $\mathcal{E}$,

$M(\mathcal{E}^0)$ *l'espace vectoriel des champs de moments (champs équiprojectifs) sur* $\mathcal{E}^0$,

$\mathbb{D}(\mathcal{E}^0)$ *le groupe des déplacements de* $\mathcal{E}^0$,

Pour $m \in \mathcal{E}^0$ *définissons l'application* $\sigma_m : \mathbb{D}(\mathcal{E}^0) \longrightarrow \mathcal{E}^0 : Z \longrightarrow Z(m)$, *son application tangente* $T\sigma_m$ *transforme* $T_Z \mathbb{D}(\mathcal{E}^0)$ *en* $T_{Z(m)} \mathcal{E}^0 \equiv \{Z(m)\} \times \mathcal{E}^0$.

La propriété suivante, cas particulier d'un résultat plus général, (*) intervient frèquemment, sous une forme élémentaire, en dynamique des solides indéformables

(a) L'application de $T\mathbb{D}(\mathcal{E}^0)$ *dans* $\mathbb{M}(\mathcal{E}^0)$ *qui à* $u \in T_Z \mathbb{D}(\mathcal{E}^0)$ *associe le champ* $\mathcal{X}_u \in \mathbb{M}(\mathcal{E}^0)$ *défini par :*

(1) $\mathcal{X}_u (Z(m)) = T\sigma_m (u)$

détermine un isomorphisme de $T_Z \mathbb{D}(\mathcal{E}^0)$ *sur* $\mathbb{M}(\mathcal{E}^0)$.

(b) L'application $\lambda : u \rightsquigarrow (p\,u, \mathcal{X}_u)$ *est un isomorphisme du fibré tangent* $\mathcal{T}(\mathbb{D}(\mathcal{E}^0))$ *sur le fibré trivial* $\mathbb{D}(\mathcal{E}^0) \times \mathbb{M}(\mathcal{E}^0)$.

Si $D \in \mathbb{D}(\mathcal{E}^0)$ *on définit les translations à droite et à gauche par*

$$\delta_D : Z \longrightarrow Z \circ D \quad , \quad \gamma_D : Z \longrightarrow D \circ Z$$

ces applications sont des difféomorphismes de la variété différentielle $\mathbb{D}(\mathcal{E}^0)$.

(*) Cf par exemple Nomizu Chap. I §6.

Il est intéressant d'exprimer les δ_D *(resp :* γ_D*) - isomorphismes* $\lambda \circ T\,\delta_D \circ \lambda^{-1}$ *(resp :* $\lambda \circ T\,\gamma_D \circ \lambda^{-1}$*) qui traduisent en termes de champs de moments sur* ξ° *les opérations* $T\delta_D$ *et* $T\gamma_D$ *:*

(2) $\lambda \circ T\delta_D \circ \lambda^{-1} : (Z, \mathfrak{X}) \rightsquigarrow (\delta_D Z, \mathfrak{X}) \equiv (Z \circ D, \mathfrak{X})$

(3) $\lambda \circ T\gamma_D \circ \lambda^{-1} : (Z, \mathfrak{X}) \rightsquigarrow (\gamma_D Z, TD \circ \mathfrak{X} \circ D^{-1}) \equiv (DoZ, TDo\ldots)$

Avec la définition 1 on a donc, sous une autre forme, pour $u \in T\mathbb{D}(\xi^\circ)$

(4) $\mathfrak{X}_{T\delta_D u} = \mathfrak{X}_u$

(5) $\mathfrak{X}_{T\gamma_D u} = TD \circ \mathfrak{X}_u \circ D^{-1}$

(formules qui découlent, par dérivation, des identités triviales $D(\sigma_m(Z)) = \sigma_m(\gamma_D Z)$ *et* $\sigma_{D(m)}(Z) = \sigma_m(\delta_D Z)$*)*

Si A *est un point fixé de* ξ°*, tout* $Z \in \mathbb{D}(\xi^\circ)$ *est de la forme*

$m \rightsquigarrow p$ *avec* $\overrightarrow{Ap} = X_Z + R_Z(\overrightarrow{Am})$

avec $X_Z \in \xi$ *et* R_Z *(opérateur orthogonal attaché à* Z*)* $\in \mathcal{O}(\xi)$ *et alors* $TZ : (T\xi^\bullet \longrightarrow T\xi^\circ)$ *n'est autre que l'application*

$(m, X) \rightsquigarrow (Z(m), R_Z(X))$

En parallèle avec l'introduction de X_Z *et* R_Z *on introduit pour chaque* $u \in T_Z\mathbb{D}(\xi^\circ)$ *les vecteurs*

$v \equiv \bar{v}_u = p_2\,\mathfrak{X}_u(Z(A))$

$\omega \equiv \omega_u =$ *résultante du champ de moments* $\mathfrak{X}_u$

de sorte que

$p_2\,\mathfrak{X}_u(Z(m)) = \bar{v}_u + \omega_u \wedge R_Z(\overrightarrow{A\,m})$

n°2. Descriptions d'un milieu continu curviligne

Dans la suite on désignera par

Π un sous-espace de dimension 2 de ξ

Π° un sous-espace affine de ξ° parallèle à Π

$\vec{k}$ un vecteur unitaire orthogonal à Π, vecteur qui déterminera sur Π une orientation.

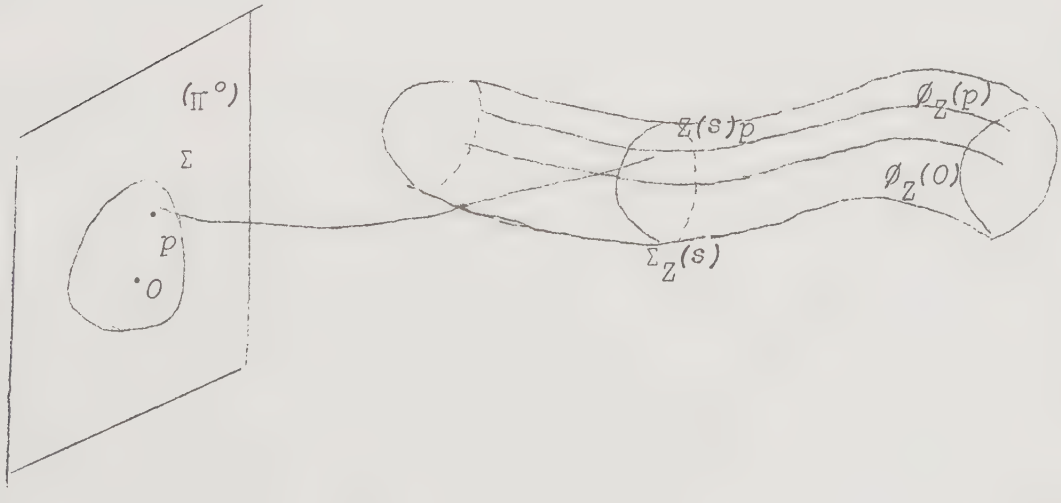
Pour définir un milieu continu curviligne déformable on se donne :

- La section type Σ qui est un ensemble de points du plan Π° (pour fixer les idées Σ est un ouvert relativement compact, connexe, plus sa frontière).
- L'ensemble des paramètres des sections : I = intervalle $(0,L)$ de $\mathbb{R}$.

Chaque configuration du milieu continu est représentée par une application

- $Z : I \longrightarrow \mathbb{D}(\xi^\circ)$ (dérivable)

Pour chaque $s \in I$, $Z(s)$ est le déplacement qui transforme la section type Σ en la "section". $\Sigma_Z(s)$, position dans ξ° de la section "s" pour la configuration Z du milieu continu.



Si l'on fixe $p \in \Sigma$ *l'arc* $\varphi_Z(p) : s \rightsquigarrow Z(\ ,p)$ *représente une fibre matérielle du milieu continu dans la configuration* Z. *Il est souvent pratique de se référer à une fibre particulière choisie une fois pour toutes et que l'on appelle alors fibre moyenne. Cette fibre est entièrement déterminée par la donnée de* $O \in \Sigma$. *Dans ces conditions le déplacement* $Z(s)$ *est représenté par*

$$(6) \qquad p \rightsquigarrow m \text{ tel que } \overrightarrow{Om} = X_Z(s) + R_Z(s)\ (\overrightarrow{Op})$$

où $X_Z : I \longrightarrow \mathcal{E}$ *et* $R_Z : I \longrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{E})$ *sont des fonctions dérivables. La fibre moyenne est l'arc* $\varphi_Z(O) : s \rightsquigarrow A(s) = O + X_Z(s)$.

Condition de régularité

Nous supposons dans la suite que Z *est de classe* $\mathcal{E}^1$ *et que*

(7) d'application $\overline{Z} : I \times \Pi \longrightarrow \mathcal{E}^0 : (s,p) \rightsquigarrow Z(s,p)$ *n'a pas de point singulier et conserve l'orientation pour* $(s,p) \in I \times \Sigma$. *Autrement dit*

$\forall (s,p) \in I \times \Sigma \quad Z'(s,p) \in \mathcal{L}(R \times \pi, \mathcal{E})$ *est un isomorphisme d'espaces orientés.* (Π *est orienté par* $\mathbb{k}$).

Cette condition est naturelle en mécanique des milieux continus : elle exprime que la configuration "Z" du milieu continu se déduit du cylindre $\Sigma + \Pi k$ *par un difféomorphisme conservant l'orientation.*

Dans les conditions de (6) on voit par un calcul simple que la condition de régularité s'exprime par

$$(8) \quad \forall (s,p) \in I \times \Sigma \quad \langle R_Z(s)\,\mathbb{k} \mid X'_Z(s) + R'_Z(s)\ (\overrightarrow{Op}) \rangle > 0$$

Un milieu continu curviligne peut être considéré comme un milieu continu tridimentionnel astreint à vérifier certaines liaisons internes : les déformations qui, pour un milieu continu tridimentionnel peuvent être en général des difféomorphismes quelconques, doivent ici être des difféomorphismes se réduisant à un déplacement de $\mathbb{D}(\mathcal{E}^0)$ *sur chaque section* $\Sigma(s)$. *Les mécaniciens imposent souvent une liaison interne supplémentaire de la forme suivante :*

(9) (Liaison de Navier-Bernoulli) Pour toute configuration Z *du milieu continu la fibre moyenne est normale à* $\Sigma_Z(s)$; *autrement dit*

$$\forall s \in I : \quad R_Z(s)\ (\mathbb{k}) \wedge X'_Z(s) = 0$$

Remarques :

1°) La nature exacte de l'ensemble Σ qui représente la section type n'intervient essentiellement que dans la condition de régularité (8) qui impose des limites aux déformations vérifiant les liaisons internes et que peut subir le milieu continu.

2°) Avec les hypothèses faites toutes les sections du milieu continu curviligne sont isométriques à une même partie d'un plan ; on peut affaiblir ces hypothèses et se donner une famille $\{\Sigma_s \mid s \in I\}$ de parties de $\mathbb{R}^*$ de telle sorte que dans la configuration Z la section $\Sigma_{Z(s)}$ se déduise de Σ_s par l'isométrie $Z(s)$. En procédant ainsi on ne changerait guère la forme de ce dont nous traitons ici.

n°3. Déformations d'un milieu continu curviligne

Considérons une configuration de référence du milieu continu représentée par

$$Z_o : I \longrightarrow \mathbb{D}(\mathcal{E}^o)$$

Toute autre configuration $Z : I \longrightarrow \mathbb{D}(\mathcal{E}^o)$ est de la forme

$$Z(s) = \Delta(s) \circ Z_o(s) \qquad \text{avec} \quad \Delta(s) = Z(s) \circ Z_o(s)^{-1}$$

$\Delta : I \longrightarrow \mathbb{D}(\mathcal{E}^o)$ représente la transformation qui permet de passer de la configuration de référence à la configuration Z considérée.

Si l'on a choisi une fibre moyenne on peut représenter $\Delta(S)$ par le déplacement $m \rightsquigarrow p$ tel que $\overrightarrow{A(s)} = U_\Delta(s) + H_\Delta(s)\ \overrightarrow{(A(s)m)}$

$U_\Delta(s)$ est le vecteur déplacement du point $A(s)$ situé dans la configuration de référence Z_o sur la fibre moyenne.

$H_\Delta(s) \in \mathcal{O}(\xi)$ est l'opérateur orthogonal qui transforme la direction du plan $\Sigma_{Z_o}(s)$ en la direction du plan $\Sigma_Z(s)$. On a les relations

$$U_\Delta = X_Z - X_o \ , \quad H_\Delta = R_Z \circ R_o^{-1} \qquad (X_o = X_{Z_o},\ R_o = R_{Z_o})$$

Pour mettre en évidence un paramètre analogue au tenseur des déformations de l'élasticité classique et qui caractérise ici les propriétés locales de la déformation à partir de la configuration Z_o on peut remarquer que $T\Delta : I \times \mathbb{R} \longrightarrow T\ \mathbb{D}(\mathcal{E}^o)$ applique $(\ ,1)$ dans $T_{\Delta(\ )}\mathbb{D}(\mathcal{E}^o)$,

---

(*) Δ doit être considéré comme fonction de Z, Z_o étant fixé une fois pour toutes. e_Z est la différentielle de Δ dans le sens donné à ce terme par Dieudonné - Eléments d'analyse tome IV XIX §15.

de plus $T\gamma_{\Delta(s)}{}^{-1}$ applique $T_{\Delta(s)}\mathbb{D}(\mathcal{E}^o)$ sur $T_{id}\mathbb{D}(\mathcal{E}^o)$. On est ainsi conduit à caractériser cette déformation par

(10) $$e_Z : I \longrightarrow T_{id}\mathbb{D}(\mathcal{E}^o) : s \rightsquigarrow T\gamma_{\Delta(s)}{}^{-1}\,(T\Delta(s,1))^{(*)}$$

Le choix de ce paramètre est satisfaisant car

(11) Si Δ est une application constante, c'est-à-dire que la configuration Z se déduit de Z_o par un déplacement solidifiant alors $e_Z = 0$.

(12) Si l'on compose Z par un déplacement solidifiant $\Delta^* : s \rightsquigarrow \Delta^*$ avec Δ^* indépendant de s alors $e_Z = e_{\Delta^* o\, Z}$.

La première propriété montre que e_Z est attaché à la déformation proprement dite, la seconde, qui vaut aussi lorsque Δ^* dépend du temps permettra de formuler des lois de comportement vérifiant le principe d'indifférence matérielle pour les milieux continus curvilignes.
Démontrons (12) :

$$T\Delta^* o\,\Delta\,(s,1) = T(\gamma_{\Delta^*} o\ \Delta)\,(s,1) = T\gamma_{\Delta^*}\,(T\Delta\,(s,1))$$

or

$$T\,\gamma_{(\Delta^*\,o\,\Delta(s))}{}^{-1} = T\gamma_{\Delta(s)}{}^{-1}\ o\ T\gamma_{\Delta^*}{}^{-1}$$

donc

$$e_{\Delta^* o\, Z}(s) = T\gamma_{\Delta(s)}{}^{-1}\ o\ (T\gamma_{\Delta^*}{}^{-1}\ o\ T\gamma_{\Delta^*})\ (T\Delta(s,1)) = e_Z(s)$$

puisque

$T\gamma_{\Delta^*}{}^{-1}\ o\ T\gamma_{\Delta^*}$ est l'identité sur $T\,\mathbb{D}(\mathcal{E}^o)$.

<u>Expressions de e_Z en fonction de X_Z et R_Z ou de U_Δ et H_Δ</u>

$T\Delta(s,1)$ s'identifie au champ de moments sur $\mathcal{E}^o$ tel que (cf §1 n°1)

$$\mathcal{X}_1(s)\ (\Delta(s)m)) = T_{\Delta(s)m}\ (T\Delta(s,1)) = (m, \frac{d}{ds}\ r_m\,\Delta(s)) = (m, \frac{d}{ds}\ \Delta(s)\ (m))$$

d'où

(13) $$\mathcal{X}_1(s)\ (\Delta(s)(m)) = (m, \frac{dU_\Delta}{ds}(s) + (id - H_\Delta(s))(X'_o(s)) + \frac{d\omega_1}{ds}\ (s) \wedge H_\Delta(s)(\overrightarrow{A(s)m}))$$

(*) Δ doit être considéré comme fonction de Z, Z_o étant fixé une fois pour toutes. e_Z est la différentielle de Δ dans le sens donné à ce terme par Dieudonné . Eléments d'analyse Tome IV XIV §15.

avec :

$$(14) \qquad \frac{dH_\Delta}{ds}(S) = \frac{d\omega_\Delta}{ds}(s) \wedge H_\Delta(s)$$

$\mathcal{X}_1(s)$ est donc le champ de moments sur ξ° dont la résultante est $\frac{d\omega_\Delta}{ds}(s)$ et la valeur en $\Delta(s)$ $(A(s))$ est $\frac{dU_\Delta}{ds}(s) + (id - H_\Delta(s))(X'_o(s))$.

Compte tenu de la formule (5) il s'ensuit que $e_Z(S)$ s'identifie au champ de moments sur ξ° dont la résultante est

$$(15) \qquad \eta_Z(s) = H_\Delta(s)^{-1} \left(\frac{d\omega_\Delta}{ds}(s)\right)$$

et la valeur en $A(S)$ est

$$(16) \qquad \varepsilon_Z(s) = H_\Delta(s)^{-1} \left(\frac{dU_\Delta}{ds}(s) + (id - H_\Delta(s))(X'_o(s))\right)$$

Si l'on introduit $\frac{d\omega_Z}{ds}$ et $\frac{d\omega_o}{ds}$ définis respectivement par :

$$(17) \qquad \frac{dZ}{ds} = \frac{d\omega_Z}{ds} \wedge Z \quad et \quad \frac{dZ_o}{ds} = \frac{d\omega_o}{ds} \wedge Z_o$$

alors $\frac{d\omega_Z}{ds} = \frac{d\omega_\Delta}{ds} + H_\Delta(s)^{-1} \left(\frac{d\omega_o}{ds}(s)\right)$ donc :

$$(18) \qquad \eta_Z(s) = H_\Delta(s)^{-1} \left(\frac{d\omega_Z}{ds}(s)\right) - \frac{d\omega_o}{ds}(s)$$

$$(19) \qquad \varepsilon_Z(s) = H_\Delta(s)^{-1} \left(\frac{dX_Z}{ds}(s)\right) - \frac{dX_o}{ds}(s)$$

§2. Mécanique des milieux continus curvilignes.

n°1. Lois de comportement d'un milieu continu curviligne.

Supposons d'abord que le milieu continu subisse des transformations telles que le travail des déformations dérive d'un potentiel fonction de e_Z. *Plus précisément*

(1) *Il existe une fonction de classe* $\mathcal{E}^1$ $\pi : T_{id}\,\mathbb{D}(\xi^\circ) \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que l'énergie de déformation du milieu continu s'exprime par*

$$\mathcal{U}(Z) = \int_I \pi\,(e_Z(s))\,ds$$

Si l'on a choisi une fibre moyenne et que l'on représente e_Z *à l'aide des deux champs* η_Z *et* ε_Z *définis par (15) et (16) au §1 cela s'énonce aussi :*

(2) *Il existe une fonction de classe* $\mathcal{E}^1$ $w : \xi \times \xi \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que l'énergie de déformation du milieu continu s'exprime par*

$$\mathcal{U}(Z) = \int_I w\,(\varepsilon_Z(s),\ \gamma_Z(s))\,ds$$

$\pi(e_Z(s)) \equiv w\,(\varepsilon_Z(s),\ \eta_Z(s))$ *représente une énergie potentielle linéique Cette hypothèse est en particulier vérifiée en élasticité isotherme ou adiabatique pour un milieu continu effectuant des transformations réversibles.*

L'expression du travail ou de la puissance (réelle ou virtuelle) des efforts interieurs s'obtient en différentiant la fonctionnelle $\mathcal{U}$ *"par rapport à Z" ce qui est un problème d'analyse fonctionnelle qui sera examiné plus loin sous sa forme rigoureuse ; L'aspect formel de la question est le suivant : si* $u^* : I \longrightarrow T\,\mathbb{D}(\xi^\circ)$ *avec* $u^*(s) \in T_{Z(s)}\,\mathbb{D}(\xi^\circ)$ *est un champ de vitesses virtuelles dans la configuration* Z *et si le champ de moments* $V^*(s)$ *sur* ξ° *a pour résultante* $\omega^*(s)$ *et pour valeurs* $v^*(s)$ *au point* $Z(s)\ (0) = A(s)+U_\Delta(s)$

$$(2) \qquad d\varepsilon_Z\,(u^*) = H_\Delta(s)^{-1}\ \left(\frac{dV^*}{ds}(s) - \omega^*(s) \wedge \frac{dX_Z}{ds}\ (s)\right)$$

$$(3) \qquad d\eta_Z\,(u^*) = H_\Delta(s)^{-1}\ \left(\frac{d\omega}{ds}^*(s)\right)$$

dans ces conditions

$$(4)\quad d\mathcal{U}(u^*) = \int_I \partial_1 \mathcal{W}(\varepsilon_Z(s),\ \eta_Z(s))\ o\ H_\Delta(s)^{-1}(v^{*\prime}(s) - \omega^*(s)\ \Lambda\ X'_Z(s))ds$$

$$+\int_I \partial_2 \mathcal{W}(\varepsilon_Z(s),\ \eta_Z(s))\ o\ H_\Delta(s)^{-1}\ (\omega^{*\prime}(s))ds$$

or il existe deux fonctions $\mathcal{T}: \mathcal{E}\times\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ et $\mu : \mathcal{E}\times\mathcal{E}$ telles que

$(5)\ \partial_1 \mathcal{W}(\varepsilon,\eta)\ (X) = \langle \mathcal{T}(\varepsilon,\eta) | X\rangle,\ \partial_2 \mathcal{W}(\varepsilon,\eta)(x) = \langle \mu(\varepsilon,\eta) | X\rangle$ pour $\varepsilon,\eta,\ X\in\mathcal{E}$

Dans ces conditions

$$(6)\quad d\mathcal{U}(u^*) = \int_I \langle H_\Delta(s)\ \mathcal{T}(\varepsilon_Z(s),\ \eta_Z(s)) \mid v^{*\prime}(s) - \omega^*(s)\ \Lambda\ X'_Z(s)\rangle ds$$

$$+\int_I \langle H_\Delta(s)\ \mu\ (\varepsilon_Z(s),\ \eta_Z(s)) \mid \omega^{*\prime}(s)\rangle ds$$

$$= \int_I \langle \mathcal{C}_Z(\varepsilon_Z(s),\ \eta_Z(s)) \mid v^{*\prime}(s) - \omega^*(s)\ \Lambda\ X'_Z(s)\rangle ds$$

$$+\int_I \langle \mathcal{K}_Z(\varepsilon_Z(s),\ \eta_Z(s)) \mid \omega^{*\prime}(s)\rangle ds$$

avec

$$(7)\quad \mathcal{C}_Z(\varepsilon,\eta) = H_\Delta(s)\ \mathcal{T}(\varepsilon,\eta) \text{ et } \mathcal{K}_Z(\varepsilon,\eta) = H_\Delta(s)\ \mu(\varepsilon,\eta)$$

dans ces formules $\mathcal{T}$ et μ qui représentent respectivement une force et un moment jouent le rôle des contraintes de Kirchoff de l'élasticité générale, $\mathcal{C}_Z$ et $\mathcal{K}_Z$ représentent les contraintes physiques, résultante et moment résultant en $Z(s)$ (0) des efforts de contact appliqués dans la section "S" et jouent le rôle des contraintes de Cauchy de l'élasticité.

D'une manière générale, si l'on ne fait plus l'hypothèse de l'existence d'une énergie de déformation dont le travail des efforts intérieurs est la différentielle on pourra supposer que les lois de comportement du milieu continu curviligne sont de la forme :

$$(8)\quad \mathcal{C}_Z = \text{fonction connue de } \varepsilon_Z \text{ et } \eta_Z$$

$$\mu_Z = \text{fonction connue de } \varepsilon_Z \text{ et } \eta_Z$$

et la puissance des efforts intérieurs s'exprime toujours par (6). Que les lois de comportement soient données par (5) ou (8), la formule (12) §1 permet aisément de montrer que le principe d'indifférence matérielle est vérifié (*).

(*) Bien entendu Δ peut dépendre du temps t. Le principe d'indifférence matérielle (P--Germain) est aussi appelé principe d'objectivité par J-Mandel.

n°2. *Expression de l'énergie cinétique. Puissance virtuelle des quantités d'accélération.*

Δ et Z sont des fonctions de $t \in \mathbb{R}$ et $s \in I$, la configuration de référence Z_o est fixée et, bien entendu, indépendante de t.
Si l'on choisit une fibre moyenne :

(9) $\Delta(t,s)$ est le déplacement $m \rightsquigarrow p$ avec

$$\overrightarrow{A(s)\ p} = U_\Delta(t,s) + H_\Delta(t,s)\ \overrightarrow{(A(s)\ m)}$$

à l'instant t le vecteur vitesse du point matériel (s,p) $(p \in \Sigma)$ est (**) (cf §1 n°1)

$$(10)\quad \mathcal{V}(t,s)\ (Z(t,s)\ (p)) = T_t\ \Delta\ (t,s) \circ Z_o(s)\ p$$

où

$\mathcal{V}(t,s)$ est le champ de moments correspondants à ($T_t\ Z(t,s) \in T_{Z(t,s)}\ \mathbb{D}(\xi^o)$.

Si l'on exprime $\Delta(t,s)$ selon (9) alors $\mathcal{V}(t,s)$ est le champ de moments sur ξ^o tel que :

$$(11)\quad \begin{cases} \mathcal{V}(t,s)\ (\Delta(t,s)\ A(s)) = \dfrac{\partial}{\partial t}\ U_\Delta(t,s) = v(t,s) \\ \text{résultante } \mathcal{V}(t,s) = \Omega_\Delta(t,s) \end{cases}$$

où $\Omega_\Delta(t,s)$ est défini par $\dfrac{\partial}{\partial t}\ H_\Delta(t,s) = \Omega_\Delta(t,s) \wedge H_\Delta(t,s)$

de sorte que

$$(12)\quad \mathcal{V}(t,s)\ (Z(t,s)p) = v(t,s) + \Omega(t,s) \wedge H(t,s)\ \overrightarrow{(A(s)\ Z_o(s)\ p)}$$

$$= v(t,s) + \Omega(t,s) \wedge H(t,s) \circ R_o(s)\ \overrightarrow{(Op)}$$

Nous supposerons que la répartition de masse dans la section type Σ est $d\mu$ et que celle du milieu continu est transportée de $dS \otimes d\mu$ par $Z : I \times \Sigma \longrightarrow \xi^o : (s,p) \rightsquigarrow Z(s)(p)$. Dans ces conditions l'énergie cinétique est

$$(13)\quad \mathcal{K} = \frac{1}{2} \int (\mathcal{V}(t,s,\ (Z(t,s)(p)))^2\ ds \otimes d\mu$$

(**) Pour des fonctions f définies sur $\mathbb{R} \times I$ on a deux applications tangentes partielles $T_t f$ et $T_s f$

Ce qui, dans les conditions de (12) s'exprime par

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\rho \int_I (v(t,s))^2 ds + \rho \int_I \langle v(t,s) | \Omega_\Delta(t,s) \wedge H_\Delta(t,s) \circ R_o(s)(\overrightarrow{OG})\rangle ds$$

$$+ \frac{1}{2}\int_I ds \int_\Sigma (\Omega_\Delta(t,s) \wedge H_\Delta(t,s) \circ R_o(s)(\overrightarrow{Op}))^2 d\mu(p)$$

Avec $\rho = \int_\Sigma d\mu$ et G centre d'inertie de la mesure $d\mu$: $\int_\Sigma \overrightarrow{Gp}\, d\mu(p) = 0$

Pour exprimer le dernier terme de $\mathcal{K}$ on introduit le "tenseur d'inertie" de la mesure $d\mu$ sur Σ; plus précisément on définit la forme bilinéaire (*) symétrique $\mathcal{I}_o : \xi \times \xi \longrightarrow \mathbb{R}$:

(14) $\mathcal{I}_o(X,Y) = \int_\Sigma \langle X \wedge \overrightarrow{Op} \mid Y \wedge \overrightarrow{Op} \rangle\, d\mu(p)$

et (15) $\mathcal{I}_A(s) = R_o(s)^{-1*} \mathcal{I}_o \qquad ((X,Y) \rightsquigarrow \mathcal{I}_o(R_o(s)^{-1} X,\ R_o(s)^{-1} Y))$

de sorte que

(16) $\mathcal{K} = \frac{1}{2}\rho \int_I (v(t,s))^2 ds + \frac{1}{2}\int_I H(t,s)^{-1*} \mathcal{I}_A(s)\ (\Omega_\Delta(t,s),\ \Omega_\Delta(t,s))\, ds$

$$+ \rho \int_I \langle v(t,s) \mid \Omega(t,s) \wedge H(t,s) \circ R_o(s)(\overrightarrow{OG})\rangle ds$$

Si l'on a choisi pour origine dans Π' le centre d'inertie de la mesure $d\mu$, ce que l'on fait habituellement, le dernier terme de (16) est nul.

Un champ de vitesses virtuelles (compatible avec les liaisons internes) dans la configuration $Z(t,.) = \Delta(t,.) \circ Z_o$ est une application $u^* : I \longrightarrow T\,\mathbb{D}(\xi^o)$ telle que $u^*(s) \in T_{Z(t,s)}\ \mathbb{D}(\xi^o)$ et qui est assez régulière ; il lui correspond une application

$\mathcal{V}^* : \Pi \longrightarrow \mathbb{M}(\xi^o)$: $\mathcal{V}^*(s)\ (Z(t,s)(p)) = T\sigma_p\ (u^*(s))$.

telle que la vitesse du point matériel (s,p) soit $\mathcal{V}^*(s)\ (Z(t,s)\ (p))$.
La puissance virtuelle des quantités d'accélération est alors

$$\mathcal{C}_a = \int_{I \times \Sigma} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{V}(t,s)\ (Z(t,s)(p)) \mid \mathcal{V}^*(s)\ (Z(t,s)(p)) \right\rangle ds \otimes d\mu$$

sous une autre forme

(17) $\mathcal{C}_a(\grave{a}\ t_o) = \frac{d}{dt} \int_{I\times\Sigma} \langle \mathcal{V}(t,s)(p)) | \mathcal{V}^*(s)\ (Z(t_o,s)(p))\rangle\, ds \otimes d\mu$

pour $t = t_o$

(*) Le tenseur d'inertie de $d\mu$ sur Σ (resp : de la mesure transportée de $d\mu$ par $Z_o(s)$ sur $\Sigma_o(s)$) est tel que $\mathcal{I}_o(X,Y) = C_2^2\, C_1^1\ (I_o \otimes X, \otimes Y)$
(resp : $\mathcal{I}_A(s) =) C_2^2\, C_1^1 \mid_A (s) \otimes X \otimes Y)\ \ I_o$ (resp : $I_A(s)) \in \xi^* \otimes \xi^*$

Remarque :

our la suite, dans laquelle nous utiliserons le schéma du chapitre I §4, nous allons analyser la forme des expressions trouvées.

Pour toute application $\alpha : I \longrightarrow T\mathcal{D}(\xi^0)$ *on peut définir* $\zeta\,\alpha : I \times \Sigma \longrightarrow \xi$ *par*

(18) $\qquad \zeta\alpha\ (S,p) = p_2\ T\ \sigma_p\ \ (\alpha(S))$

(on transforme tout arc dans $T\mathcal{D}(\xi^0)$ *en un "champ de vecteurs sur* $I \times \Sigma$*")*

Si θ *est la forme bilinéaire sur* $L^2_\xi\ (I \times \Sigma,\ ds \otimes d\mu)$ *définie par*

$$\theta(f,g) = \int < f(S,p) \mid g(S,p) > dS \otimes d\mu$$

alors

(19) $\mathcal{K} = \frac{1}{2}\ \theta\ \ (\zeta\ T_t\ Z(t),\ \zeta\ T_t\ Z(t))$

(20) $\mathcal{P}_a = \frac{d}{dt}\ \theta\ (\zeta\ T_t\ Z(t),\ \zeta\ u^*)$.

n°3. Puissances virtuelles des forces extérieures.

Plusieurs cas peuvent se présenter ; par exemple

1°) Forces de masses de densité $f(t,s,p)\ (\in \xi)$ *indépendante de la position.*

La puissance virtuelle est alors donnée par

$$\mathcal{P} = \int_{I \times \Sigma} < f(t,s,p) \mid \mathcal{V}^*(s)\ \ (Z(t,s)\ \ (p)) > ds \otimes d\mu$$

Si l'on introduit V^* *et* ω^**:* $I \longrightarrow \xi$ *tels que*

$V^*(s) = \mathcal{V}^*(s)\ \ (Z(t,s)(0))$, $\omega^*(s)$ = *résultante du champ* $\mathcal{V}^*(s) \in \mathbb{M}\ (\xi^0)$

(21) $\mathcal{P} = \int_I\ (<F(t,s) \mid v^*(s) > + <H_\Delta(t,s)(L(t,s)) \mid \omega^*(s) >)\ ds$

avec $F(t,s) = \int_\Sigma f(s,p)\ d\mu(p)$, $L(t,s') = \int_\Sigma R_o(s)\ \ (\overrightarrow{Op}) \wedge f(s,p)\ d\mu(p)$

2°) Forces de massses de densité $f \circ Z\ (t,s)\ (p)$ $(f : \xi^0 \longrightarrow \xi)$ *fonction de la position. On trouve alors*

(22) $\mathcal{P} = \int_I\ (<F(Z(t,s)) \mid v^*(s) > + < H_\Delta(t,s)(L(s,Z(t,s))) \mid \omega^*(s) >)\ ds$

avec

$$F(Z) = \int_\Sigma f(Z(p))\ d\mu(p),\ L(s,Z) = \int_\Sigma R_o(s)\ \ (\overrightarrow{Op}) \wedge f(Z(p))\ d\mu(p)$$

si $Z \subset \mathcal{D}(\xi^0)$.

3°) Force de densité superficielle de densité $\varphi(s,p)$ ($\in \mathcal{G}$) par rapport à la mesure $d\ell$ de $\partial\Sigma$ (supposé assez régulier). On trouve une formule analogue à (21) avec cette fois :

$$F(t,s) = \int_{p \in \partial\Sigma} \varphi(s,p)\, d\ell(p), \quad L(t,S) = \int_{p \in \partial\Sigma} R_o(s)\overrightarrow{(Op)} \wedge \varphi(s,p)\, d\ell(p)$$

4°) Forces appliquées aux sections d'extrémité $\Sigma_Z(0)$ et $\Sigma_Z(L)$

Dans le cas de $\Sigma_Z(0)$ par exemple la puissance virtuelle est :

(23) $\mathcal{P} = \langle F_o(t) \mid v^*(0) \rangle + \langle H_\Delta(t,0)\,(L_o(t)) \mid \omega^*(0) \rangle$

pour les forces dépendant seulement du temps et non de la position

(24) $\mathcal{P} = \langle F_o \circ Z(t,0) \mid v^*(0) \rangle + \langle H_\Delta(t,0)\,(L_o \circ Z(t,0)) \mid \omega^*(0) \rangle$

pour les forces fonctions de la position.

§2. Dynamique analytique des milieux continus curvilignes.

Pour appliquer les résultats du chapitre I §4 il faut définir avec précision l'espace des configurations d'un milieu continu curviligne et mettre en évidence sur cet espace une structure de variété bimodelée.

n°1. Les variétés bimodelées $\mathbb{G}$ et $\mathbb{A}$

On notera (O,X,R) *où* $O \in \mathcal{E}^0$, $X \in \mathcal{E}$, $R \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$ *le déplacement* $Z \in \mathbb{D}(\mathcal{E}^0)$ *tel que* $Z : m \rightsquigarrow p$ *tel que* $\overrightarrow{Op} = X + R\,\overrightarrow{(Om)}$
Par ailleurs on sait qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ *de* 0 *dans* $\mathcal{E}$ *telle que l'application*

$$e = \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{E})$$

où $e(Y) = \exp(y\,\Lambda)$ *(exponentielle de l'opérateur linéaire* $x \rightsquigarrow y \wedge x$*) est un homéomorphisme de* $\mathcal{U}$ *sur un voisinage ouvert de l'identité dans* $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ *(sous-variété de* $\mathcal{L}(\mathcal{E})$*) et dont l'inverse est l'application*

$$u \rightsquigarrow \nu^{-1}\,\mathrm{Log}\,u$$

où ν *est l'isomorphisme* $y \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow y \wedge x)$ *de l'espace vectoriel* $\mathcal{E}$ *(de dimension 3 euclidien et orienté) sur l'espace vectoriel des endomorphismes antiadjoints de* $\mathcal{E}$.
Ceci étant si $Z_o = (O, X_o, R_o)$ *est fixé les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) (a) $Z = (O,\ X_o + X,\ R_o R)$ $(X \in \mathcal{E},\ R \in \mathcal{O}(\mathcal{E}))$

(b) $Z \circ Z_o^{-1} = (Z_o(O),\ X,\ R)$

de plus les bijections $\psi_A : \mathcal{E} \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{D}(\mathcal{E}^0)$ *telles que* $\psi_A(X,Y) = (A,\ X,\ e(y))$ *ont une image* U *qui est un voisinage ouvert de* id *dans* $\mathbb{D}(\mathcal{E}^0)$ *indépendant de l'origine* A *choisie et les relations suivantes sont équivalentes :*

(2) (c) $Z \circ Z_o^{-1} \in U$

(d) $\exists\,(x,y)$ *(unique)* $\in \mathcal{E} \times \mathcal{U}$ *tel que* $Z = (O,\ X_o + X,\ e(y) \circ R_o)$

(e) $\exists\,(x,y)$ *(unique)* $\in \mathcal{E} \times \mathcal{U}$ *tel que* $Z \circ Z_o^{-1} = (Z_o(O),\ X,\ e(y))$

Nous allons maintenant utiliser ces propriétés en "remplaçant Z par une fonction $Z : I \longrightarrow \mathbb{D}(\mathcal{C}^0)$" pour construire la variété bimodelée $\mathbb{G}$, cette construction est fondée sur des propriétés des fonctions que nous allons rappeler brièvement.

Si $p \in (1, +\infty)$ et $\mathbb{V}$ est un espace vectoriel de dimension finie on note $H^p(I; V)$ l'espace de Sobolev formé des $u \in L^1(I)$ telles que les propriétés équivalentes suivantes aient lieu :

. u' (dérivée au sens des distributions) $\in L^p_{\mathbb{V}}(I)$

. u est absolument continu et la fonction u' (définie presque partout sur I) $\in L^p_{\mathbb{V}}(I)$. $H^p(I; \mathbb{V})$ est muni de sa topologie habituelle. Les propriétés d'appartenance à des espaces H^p et de différentiabilité de fonctions définies dans des espaces H^p que nous utiliserons dans la suite sont conséquences des lemmes suivants :

Lemme 1 :

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ des espaces vectoriels de dimension finie Ω un ouvert de E, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{F})$, $u \in H^p(I; \mathbb{E})$ avec $u(I) \subset \Omega$ alors

$f \circ u \in H^p(I ; \mathbb{F})$ et $(fou)' = f'(u)\,(u')$.
(classe de $s \rightsquigarrow f'(u(s))\,(u'(s))$)

Lemme 2 :

Dans les conditions du lemme 1 l'ensemble U_Ω des u tels que $u(I) \subset \Omega$ est un ouvert de $H^p(I, \mathbb{E})$ et l'application
$\emptyset : U_\Omega \longrightarrow H^p(I, \mathbb{F}) : u \rightsquigarrow fou$ est différentiable et
$\emptyset'(u)(v) = f'(u)(v)$ $(s \rightsquigarrow f'(u)(s)(v(s)))$

. Si l'on considère les δ-couples $(H^p(I,\mathbb{E}), L^r_{\mathbb{E}}(I), j_1)$, $(H^p(I, \mathbb{F}), L^r_{\mathbb{E}}(I), j_2)$ où j_1 et j_2 sont les injections naturelles alors $\emptyset$ est bidifférentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$\emptyset^{o}(u)\,(w) = f'(u)\,(w).$$

Ces lemmes sont faciles à montrer directement, le second qui découle de la formule de Taylor avec reste intégrale est une traduction très particulière du théorème 3 chap. I §5).

Définition 1 :

Soit $p \in (1, +\infty)$, G_p *est l'ensemble des applications* $Z : I \longrightarrow D(\mathcal{E}^\circ)$ *telles que pour* 0 *origine fixée de* $\mathcal{E}^\circ$ *si* $X_Z : I \longrightarrow \mathcal{E}$,

$R_Z : I \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E})$ *sont définies par* $Z(s) = (0, X_Z(s), R_Z(s))$ $s \in I$ *alors*

$$X_Z \in H^p(I;\mathcal{E}), \quad R_Z \in H^p(I;\mathcal{L}(\mathcal{E}))$$

(La condition vaut pour toute origine 0 *dès qu'elle vaut pour*

Il est immédiat que G_p *est un groupe pour la loi de composition* $\bullet$ *telle que*

$$Z_1 \bullet Z_2\,(s) = Z_1(s) \circ Z_2(s)$$

L'inverse de Z *dans* G_p *étant telle que* $Z^{-1}(s) = Z(s)^{-1}$

Soit alors Z_o *fixé dans* G_p *posons*

$$U_{Z_o} = \{Z \in G_p \mid \forall\, s \in I \quad Z(s) \circ Z_o(s)^{-1} \in U\}$$

$$\phi_{Z_o} : U_{Z_o} \longrightarrow H^p(I;\mathcal{E}) \times H^p(I;\mathcal{E})$$

avec

$$\phi_{Z_o}(Z) = \text{fonction } s \rightsquigarrow (x(s), y(s)) \text{ si } Z \bullet Z_o^{-1}(s) = (Z_o(s)(0), x(s), e(y(s)))$$

(cf (2))

$$\Delta = (H^p(I,\mathcal{E})^2, L^2_{\mathcal{E}}(I)^2, j \times j) \text{ où } j : H^p(I,\mathcal{E}) \longrightarrow L^2_{\mathcal{E}}(I) \text{ est}$$

l'injection naturelle.

Alors

(3) $C_{Z_o} = (U_{Z_o}, \phi_{Z_o}, \Delta)$ *est une* δ*-carte de* G_p *en* Z_o.

On voit en effet aisément par application des lemmes 1 et 2 que $\phi_{Z_o}(Z)$ *ainsi définie est bien dans* $H^p(I;\mathcal{E})^2$, *de plus l'image de* ϕ_{Z_o} *est l'ouvert* $H^p(I;\mathcal{E}) \times \{y \mid y(I) \subset U\}$ *de* $H^p(I;\mathcal{E})^2$.

Proposition 1 :

La famille $\{C_Z \mid Z \in G_p\}$ *est un* δ*-atlas de classe* $\mathcal{E}^\infty$ *qui détermine sur le groupe* G_p *une structure de variété bimodelée.*

Démonstration :

Soient Z_o *et* Z_1 *tels que* $U_{Z_o} \cap U_{Z_1} \neq \emptyset$ *l'application de transition de* C_{Z_o} *à* C_{Z_1} *et sa différentielle sont :*

$$(x,y) \rightsquigarrow (X_o - X_1 + x,\ \nu^{-1}\,\mathrm{Log}\,(e(y) \circ R_o \circ R_1^{-1}))$$

$$((x,y)\ (x_1,y_1)) \rightsquigarrow (x_1,\ \nu^{-1}\ Log'\ (e(y)\ o\ R_o o R_1^{-1})(e'(y)(y_1)\ o\ R_o o R_1^{-1}))$$

et tout découle d'applications des lemmes 1 et 2.

Proposition 2 :

L'application $\bullet : \mathbb{G}_p \times \mathbb{G}_p \longrightarrow \mathbb{G}_p$ *est bidifférentiable de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *en particulier*

. $\mathbb{G}_p$ *est un groupe de Lie.*

Démonstration :

Si C_{Z_o} *et* C_{Z_1} *sont deux* δ*-cartes définies selon (3) la loi* o *s'exprime dans ces* δ*-cartes par*

$$((x_o,y_o),(x_1,y_1)) \rightsquigarrow (x_1 + e(y_1)\ o\ R_1(X_o+x_o),\nu^{-1}Log(e(y_1)oR_1oe(y_o)oR_o)$$

et tout découle des lemmes 1 et 2.

Représentation du δ*-fibré tangent à* G_p

Soient $T\ H^p(I,\xi^\circ) \equiv H^p(I;\xi^\circ) \times H^p(I;\xi)$

$$\widetilde{T}\ H^p(I;\xi^\circ) \equiv H^p(I;\xi^\circ) \times L^2(I;\xi)$$

et pour $m \in \xi^\circ$ *l'application* $\alpha_m : \mathbb{G}_p \longrightarrow H^p(I;\xi^\circ)$ *définie par*

$$\alpha_m(Z) = s \rightsquigarrow Z(s)\ (m)$$

La proposition suivante détermine un δ*-fibré vectoriel isomorphe à* $(\mathcal{Z}(\mathbb{G}_p), \widetilde{\mathcal{Z}}(\mathbb{G}_p), J)$.

Proposition 3 :

(a) α_m *est bidifférentiable de classe* $\mathcal{C}^\infty$.

(b) Si $v \in T_Z\ \mathbb{G}_p$, $w \in \widetilde{T}_Z\ \mathbb{G}_p$ *il existe* v *et* $w : I \longrightarrow T\mathbb{D}(\xi^\circ)$ *tels que*

(3) $T\ \alpha_m(v) = T\ \sigma_m\ o\ v$ *et* $T\ \alpha_m(w) = T\ \sigma_m\ o\ w$

et par suite des applications $\mathcal{X}_v$ *et* $\mathcal{Y}_w : I \longrightarrow \mathbb{M}(\xi^\circ)$

telles que :

(4) $T\ \alpha_m(v)(s) = \mathcal{X}_v(s)\ (Z(s)(m))$, $\widetilde{T}\ \alpha_m(w)(s) = \mathcal{Y}_w(s)\ (Z(s)(m))$

(c) *Les applications* $v \rightsquigarrow (Z, \mathcal{X}_v)$, $w \rightsquigarrow (Z, \mathcal{Y}_w)$, $Z = p_{G_p} v$ (*ou* $p_{G_p} w$) *déterminent un isomorphisme de* $(\mathcal{A}(G_p), \tilde{\mathcal{A}}(G_p), J)$ *sur le* δ*-fibré formé de* $(G_p \times H^p(I;M(\xi^\circ)), G_p, p_1)$, $(G_p \times L^2(I;M(\xi^\circ)), G_p, p_1)$

Démonstration :

Dans la δ*-carte* C_{Z_o} :

$$\alpha_m : (x,y) \rightsquigarrow 0 + X_o(.) + x(.) + e\circ y(.) \circ R_o(.)\ \overrightarrow{(Om)} \quad (\in H^p(I;\xi^\circ))$$

$$T\alpha_m : ((x,y)\ (x_1,y_1)) \rightsquigarrow (\alpha_m(x,y)_{C_{Z_o}},\ x_1(.)+e'(y(.))(y_1(.))\circ R_o(.)\overrightarrow{(Om)})$$

on en déduit l'existence de $\tilde{T}\alpha_m$ *et*

$$\tilde{T}\alpha_m : ((x,y),(\tilde{x}_1,y_1)) \rightsquigarrow (\alpha_m(x,y)_{C_{Z_o}},\tilde{x}_1(.) + e'(y(.))(\tilde{y}_1(.))\circ R_o\cdot\overrightarrow{(Om)})$$

d'où le (a), pour montrer (b) supposons que les représentants de $v \in T_{Z_o}\mathbb{G}_p$ *et* $w \in \tilde{T}_{Z_o}\mathbb{G}_p$ *soient respectivement* (x_1,y_1) *et* $(\tilde{x}_1,\tilde{y}_1)$ *alors si*

$v(s)$ = *vecteur de* $T_{Z_o(s)}\mathbb{D}(\xi^\circ)$ *de représentant* $((0,0),(x_1(s),y_1(s)))$ *dans la carte* $C_{Z_o(s)}$ *de* $\mathbb{D}(\xi^\circ)$.

$w(s)$ = *vecteur de* $T_{Z_o(s)}\mathbb{D}(\xi^\circ)$ *de représentant* $((0,0),(\tilde{x}_1(s),\tilde{y}_1(s)))$ *dans la carte* $C_{Z_o(s)}$ *de* $\mathbb{D}(\xi^\circ)$.

on a bien les propriétés (5), la suite du (b) découle du §1 n°1. On voit aussi que $\mathcal{X}_v(s)$ (*resp :* $\mathcal{Y}_w(s)$) *est le champ de moments sur* ξ° *de résultante* $y_1(s)$ (*resp :* $\tilde{y}_1(s)$) *et de valeur* $x_1(s)$ (*resp :* $\tilde{x}_1(s)$) *en* $Z_o(S)$ (0) *le (c) en découle.*

Proposition 4 :

Les conditions sont celles de la proposition 3(b) et γ *est la translation à gauche dans* G_p *aux premiers membres et dans* $\mathbb{D}(\xi^\circ)$ *aux seconds membres :*

$$\gamma_{Z_o}(Z)(s) = \gamma_{Z_o}(Z(s))$$

$$T\gamma_{Z_o}(v) = T\gamma_{Z_o(s)}\circ v$$

$$\tilde{T}\gamma_{Z_o}(w) = T\gamma_{Z_o(S)}\circ w$$

L'opérateur $\partial : \mathbb{G}_p \longrightarrow L^p(\ (\mathbb{G}_p))$

Compte tenu de la définition de $\mathbb{G}_p$ *il existe un opérateur* $\partial : \mathbb{G}_p \longrightarrow L^p(\mathcal{Z}(\mathbb{G}_p))$ *tel que*

pour presque tout $s \in I$ $d_s Z(s) = \partial Z(s)$ *et* $p_{\mathbb{G}_p} \circ \partial = id_{\mathbb{G}_p}$

Si l'on compose ceci avec $T\sigma_m$ *on obtient une application*

$\mathbb{G}_p \longrightarrow L^p(I; M(\mathcal{E}^\circ))$

$$Z \rightsquigarrow (s \rightsquigarrow \mathcal{X}_{\partial Z(s)})$$

ou $\mathcal{X}_{\partial Z(s)}\ (Z(s)(m)) = T\sigma_m \circ \partial Z(S)$.

L'opérateur ∂ *est donc une généralisation naturelle de* T *qui transforme les applications de* $\mathcal{E}^1(I ; \mathbb{D}(\mathcal{E}^\circ))$ *en leurs applications tangentes.*

La variété bimodelée Λ

Dans les conditions les plus générales du §2, la condition de régularité du §1 peut être écrite

(5) $\forall p \in \Sigma$, $\langle R_Z(s)(k) \mid X'_Z(s)\ \overrightarrow{(Op)} \rangle > > 0$ *pour presque tout* $s \in I$.

ou bien, sous une forme équivalente

(6) $\forall p \in \Sigma$, $\langle R_Z(s)(k) \mid \mathcal{X}_{\partial Z(s)}(Z(s)(p)) \rangle > > 0$ *pour presque tout* $s \in I$.

Il est facile de voir que cette condition détermine un ouvert de $\mathbb{G}_\infty$, *par contre ceci est inexact si* $1 \leq p < +\infty$.

Définition 2 :

On suppose $p = +\infty$, $\mathbb{G}_\infty = \mathbb{G}$ *alors*

Λ *est la sous-variété bimodelée ouverte de* $\mathbb{G}$ *formée des* Z *vérifiant les conditions équivalentes (5) et (6).*

La condition de régularité, qui apparait comme nécessaire physiquement pour décrire un milieu continu curviligne a donc pour effet, en imposant de prendre $p = +\infty$, *de conduire à un espace de configurations qui est une variété bimodelée* Λ *dont seul le second modèle est réflexif.*

n°2. Application du schéma du chapitre I §4.

On suppose que le centre d'inertie de la mesure $d\mu$ sur Σ est $G \equiv 0$ de plus on suppose aussi que l'opérateur d'inertie $\mathfrak{I}_G \equiv \mathfrak{I}_o$ défini par la formule (14) §2 avec $G = 0$ est régulier, c'est-à-dire que les moments d'inertie principaux sont > 0.

On choisit alors (notations du chapitre I §4)

(1) $\mathscr{H} = L^2(I \times \Sigma, ds \otimes d\mu)$

θ = forme bilinéaire naturelle de $\mathscr{H}$.

et ζ est défini par (cf Proposition 3)

(2) $w(s,p) = p_2 \, \tilde{T} \alpha_p (w)(s)$

Par un calcul analogue à celui qui conduit à la formule (16) du §2 on obtient si w_1 et $w_2 \in \tilde{T}_Z \Lambda$

(3) $\theta(\zeta w_1, w_2) = \int_I \langle v_1(S) \mid v_2(S) \rangle ds + \int_I \mathfrak{I}_Z(S)(\omega_1(S), \omega_2(S)) ds$

où $(v_i, \omega_i) \in L^2(I, \xi^o)$ $i = 1,2$ sont les représentants de w_1 et w_2 dans C_Z c'est-à-dire aussi que:

$v_i(S)$ = valeur en $Z(S)(0)$ de $\mathfrak{Y}_{w_i}(S) \in \mathbb{M}(\xi^o)$

$\omega_i(S)$ = résultante du champ $\mathfrak{Y}_{w_i}(S)$

$\mathfrak{I}_Z(S) = R_Z(S)^{-1} * \mathfrak{I}_o$

On déduit de la formule (3) que ($\mathfrak{I}_o$ est régulier) le morphisme bilinéaire

$\zeta^* \theta : \hat{T}\Lambda \times_\Lambda \tilde{T}\Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$

détermine sur le fibré pseudo-tangent $\tilde{\mathscr{C}}(\Lambda)$ une structure Riemanienne qui est compatible avec sa structure naturelle de fibré de Banach.

La fonction énergie cinétique $K(w) = \frac{1}{2} \theta(\zeta v, \zeta w)$ correspondante vérifie donc les conditions de dualité fortes.

On vérifie aussi aisèment que les conditions (2) du chapitre I §4 n°1 ont lieu avec ce choix de ζ. Les conditions de dérivabilité à imposer au mouvement $Z :]0, +\infty[\longrightarrow \Lambda$ sont les suivantes

(4) Z est faiblement pseudo-différentiable

(5) $\forall t \in]0, \infty[$ il existe $\Gamma(t) \in T'_{Z(t)} \Lambda$ tel que

$$\forall u^* \in T_{Z(t)} \Lambda, \frac{d}{dt} \theta(\zeta \tilde{T}Z, \zeta J u^*)(t) = \langle \Gamma(t), u^* \rangle$$

(6) $\forall t \in]0, \infty[$ les quotients $\frac{1}{h}(\xi \widetilde{TZ}(t+h) - \xi \widetilde{TZ}(t))$ restent dans un borné de $\mathcal{K}$ pour $h \neq 0$ assez petit.

La première condition traduit "l'existence" de l'énergie cinétique à chaque instant la seconde traduit celle du travail des quantités d'accélération (cf §2).

Il faut ensuite donner l'expression de la forme de Pfaff semi-basique de seconde espèce sur $\widetilde{T\Lambda}$ $\mathcal{Q}$, forme qui définit la puissance des forces. Pour un corps déformable $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_e - \mathcal{Q}_i$ où

- $\mathcal{Q}_e$ représente la puissance des forces extérieures appliquées.
- $\mathcal{Q}_i$ représente la puissance des forces intérieures.

1°) Expression de $\mathcal{Q}_e$

Les expressions données au §2 n°3 montrent qu'une forme générale $\mathcal{Q}_e$ (cf proposition 3)

$$(7)\quad \mathcal{Q}_e(w, \overset{*}{u}) = \int_I (\mathcal{F}(w, t, s) \mid \mathcal{X}_{u^*}(s))\, ds.$$

$$+ (\mathcal{F}_o(w,t) \mid \mathcal{X}_{u^*}(0)) + (\mathcal{F}_L(w,t) \mid \mathcal{X}_{u^*}(L))$$

où $\mathcal{F}(w, t, .) \in L^1(I, M(\xi^o))$ pour $t \in [0, \infty[$, $w \in \widetilde{T}\Lambda$

$\mathcal{F}_o$ et $\mathcal{F}_L(w,t) \in M(\xi^o)$

Le crochet désigne le "produit scalaire" de deux champs de moments sur ξ^o.

$$(\mathcal{X}_1 \mid \mathcal{X}_2) = \langle v_1, \omega_2 \rangle + \langle v_2, \omega_1 \rangle$$

avec $v_1 = \mathcal{X}_1(0)$, $v_2 = \mathcal{X}_2(0)$, ω_i = résultante du champ $\mathcal{X}_i$.

On voit aisément que (7) détermine une forme semi-basique sur $\widetilde{T}\Lambda$.

2°) Expression de $\mathcal{Q}_i$

On fixe $Z_o \in \Lambda$ (configuration de référence)

Considérons d'abord l'application (cf §1 (10))

$$e : \Lambda \longrightarrow L^\infty(I, T_{id}\mathcal{D}(\xi^o)) : Z \rightsquigarrow e_Z = T\gamma_{\Delta^{-1}} \circ \partial\Delta \quad \Delta = Z \circ Z_o^{-1}$$

par l'isomorphisme de $T_{id}\mathcal{D}(\xi^o)$ et $M(\xi^o)$. e détermine deux applications

η et $\varepsilon : \Lambda \longrightarrow L^\infty(I, \xi^o)$ telles que (cf §1 (17) et (18))

$$(8)\qquad \eta_Z = H_\Delta^{-1}(\omega'_Z) - \omega'_o$$

$$(9)\qquad \varepsilon_Z = H_\Delta^{-1}(X'_Z) - X'_o$$

avec $H_\Delta(S) = R_Z(S) \circ R_o(S)^{-1}$

L'énergie de déformation est définie par

(10) $\mathcal{U}(Z) = \int_I w \circ (\varepsilon_Z, \eta_Z)$ avec $w \in \mathcal{E}^1(\xi \times \xi)$

et :

(11) $Q_i = d\,\mathcal{U} \circ \tilde{p}_\Lambda$ ($\tilde{p}_\Lambda : \tilde{T}\Lambda \longrightarrow \Lambda$ projection du fibré pseudo-tangent).

Pour effectuer cette différentiation on établit d'abord le

Lemme 3 :

Soient $u^* \in T_Z\,\Lambda$ et $v^*, \omega^* \in H^\infty(I,\xi)$ tels que

$v^*(s) = p_2\, \mathcal{X}_{u^*}(s)\,(Z(s)(0))$,

$\omega^*(s)$ = résultante du champ $\mathcal{X}_{u^*} \in M(\xi^o)$

alors

(12) $d\,\varepsilon_Z(u^*) = H_\Delta^{-1}\,(v^{*\prime} - \omega^* \wedge X'_Z)$

(13) $d\,\eta_Z(u^*) = H_\Delta^{-1}\,(\omega^{*\prime})$

Démonstration :

On note Z_1 ce qui dans l'énoncé est noté Z et l'on se place dans la δ-carte C_{Z_1}. Le représentant de u^* dans C_{Z_1} n'est autre que $((0,0), (v^*, \omega^*))$ et pour Z dans le domaine de C_{Z_1} :

$X_Z = X_{Z_1} + x \qquad R_Z = e(y) \circ R_{Z_1} \qquad (x,y) \in H^\infty(I;\xi)^2$

En usant des lemmes 1 et 2, (17) du §1 entraine :

$$\omega'_Z \wedge e(y) \circ R_{Z_1} = e'(y)\,(y') \circ R_{Z_1} + e(y) \circ \omega'_{Z_1} \wedge R_{Z_1}$$

d'où

$$\omega'_Z \wedge = e'(y)\,(y') \circ e(-y) + e(y) \circ \omega'_{Z_1} \wedge e(-y)$$

en différentiant par rapport à y (en fait par rapport à (x,y))

$$\begin{aligned} d\,\omega'_Z \wedge = {} & e''(y)\,(dy)\,(y') \circ e(-y) + e'(y)\,(dy') \circ e(-y) \\ & - e'(y)(y') \circ e'(-y)\,(dy) + e'(y)\,(dy) \circ \omega'_{Z_1} \wedge e(-y) \\ & - e(y) \circ \omega'_{Z_1} \wedge e'(-y)\,(dy) \end{aligned}$$

En appliquant cela à u^* *(pour lequel* $y = 0$, $dy(u^*) = \omega^*$*)*

$$d\,\omega'_Z(u^*)\,\Lambda = \omega^{*\prime}\,\Lambda + \omega^*\,\Lambda\,\omega'_{Z_1}\,\Lambda - \omega'_{Z_1}\,\Lambda\,\omega^*\,\Lambda$$

la formule du double produit vectoriel permet de transformer les deux derniers termes et d'obtenir en revenant aux notations de l'énoncé

$$(14)\qquad d\,\omega'_Z(u^*) = \omega^{*\prime} + \omega^*\,\Lambda\,\omega'_Z$$

Par un calcul analogue on obtient

$$(15)\qquad d\,H^{-1}_{\Delta(Z)}(u^*) = -\,H^{-1}_{\Delta(Z)}\ o\ \omega^*\,\Lambda$$

Les formules (12) et (13) en découlent alors par différentiation de (8) et (9).

On déduit de ce lemme.

$$(16)\qquad d\,\mathcal{Q}_i(u^*) = \int_I \langle \mathcal{E}_Z\ o\ (\varepsilon_Z, \eta_Z) \mid v^{*\prime} - \omega^*\,\Lambda\,X'_Z \rangle + \int_I \langle \mathcal{H}_Z\ o\ (\varepsilon_Z, \eta_Z) \mid \omega^{*\prime} \rangle$$

où $\mathcal{E}_Z$ *et* $\mathcal{H}_Z$ *sont définis par (5) et (7) §2*

Si l'on renonce à l'hypothèse de l'énergie de déformation $\mathcal{E}_Z$ *et* $\mathcal{H}_Z$ *sont donnés par (8) du §2 et dans tous les cas on peut supposer que les applications*

$$(\varepsilon, \eta) \rightsquigarrow \mathcal{E}_Z(\varepsilon, \eta) \qquad (\varepsilon, \eta) \rightsquigarrow \mathcal{H}_Z(\varepsilon, \eta)$$

sont, par exemple, continues de $L^\infty(I;\mathfrak{E})^2$ *dans* $L^1(I;\mathfrak{E})$*. Il s'ensuit que* $\mathcal{Q}_i$ *détermine bien une forme de Pfaff semi-basique de seconde espèce sur* $\widetilde{T}\,\Lambda$*.*

Toutes les conditions requises pour appliquer les résultats du chapitre I §4 sont réunies. En particulier :

(I) Le principe des puissances virtuelles équivaut aux équations de Lagrange généralisées qui s'écrivent dans $C_Z \equiv C$*, avec*

$$\mathcal{K}_C : H^\infty(I;\mathfrak{E})^2 \times L^2(I;\mathfrak{E})^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{Q}_C : H^\infty(I;\mathfrak{E})^2 \longrightarrow L^\infty(I;\mathfrak{E})' \times L^\infty(I;\mathfrak{E})'$$

$$(\mathcal{Q}_C(x,y)(v,\omega) = \mathcal{Q}_{C_1}(x,y)(v) + \mathcal{Q}_{C_2}(x,y)(\omega))$$

$q = (q_1, q_2) : [0, \infty[\longrightarrow H^\infty(I;\mathbb{R})^2$

$\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2) : [0, \infty[\longrightarrow L^2(I;\mathbb{R})^2$

$j : H^\infty(I;\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(I;\mathbb{R})$ *injection canonique*

sous la forme du système

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\, \partial_3 \mathbb{K}_C(q, \dot{q}) \circ j - \partial_1 \mathbb{K}_C(q, \dot{q}) = \overset{\circ}{\wedge}_C \cdot (q, \dot{q}) \\ \dfrac{d}{dt}\, \partial_4 \mathbb{K}_C(q, \dot{q}) \circ j - \partial_2 \mathbb{K}_C(q, \dot{q}) = \overset{\circ}{\wedge}_C \cdot (q, \dot{q}) \end{cases}$$

où $q \equiv (q_1(t), q_2(t))$, $\dot{q} \equiv (\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t))$

(II) Le principe des puissances virtuelles équivaut aux équations de Hamilton.

La transformation de Legendre $D : \widetilde{\mathcal{C}}(\Lambda) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{C}}'(\Lambda)$ *est l'isomorphisme déterminé par la structure riemannienne (3) (Hypothèse de Dualité forte) et le principe des puissances virtuelles signifie que* $D \circ \widetilde{TZ}$ *est une intégrale d'un champ de pseudo-vecteurs* Y *sur* $\widetilde{T\Lambda}$ *défini par*

$$S_b(Y) = - dH + F$$

avec $H = D^{-1*}\mathbb{K}$, $F = D^{-1}\overset{\circ}{\wedge}$

S_b *défini au §3 chapitre I.*

Conclusion :

L'introduction des variétés bimodelées permet

1°) D'étendre la dynamique analytique, sous forme lagrangienne localement et sous forme hamiltonienne globalement, aux milieux continus curvilignes en partant du principe des puissances virtuelles.

2°) De n'utiliser pour cela, à priori, que des conditions de régularité faibles sur le mouvement ; à part la condition (6) - nécessaire pour une raison technique et qui ne semble pas trop restrictive - les conditions de dérivabilité traduisent simplement la nécessité d'assurer

- *L'existence de l'énergie cinétique pour la 1ère dérivation en t.*
- *L'existence de la puissance des quantités d'accélération pour la seconde.*

3°) De satisfaire la condition de régularité (5) §3.

Si l'on se limite à une étude dans le seul cadre des variétés différentielles ce qui "ramène tout à la variété sous-jacente" ces trois objectifs deviennent contradictoires ; en particulier la condition (5) conduit à une variété non réflexive alors que la dynamique hamiltonienne ne peut être développée que sur une variété réflexive. De plus cela nécessite un renforcement sustentiel des conditions de dérivabilité par rapport au temps.

Références Bibliographiques

ABRAHAM — *Foundation of mechanics (Benjamin)*

ARNOLD — *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits.*

Ann. Inst. Grenoble, 16, 1966, pages 319-361.

BLANCHETON (Mme) I. *Mécanique analytique des milieux continus*

Ann. Inst. Henri Poincaré A, Vol. VII, n° 3, 1967, pages 189-213.

II. *Les multiplicateurs de Lagrange répartis.*

C.R. Acad. Sc. t. 265, pages 115-118.

BOURBAKI

I. *Topologie générale, chap. I et II.*

II. *Espaces vectoriels topologiques, chap. I et II.*

III. *Espaces vectoriels topologiques, chap. III.*

IV. *Variétés différentielles et analytiques (Fascicules de résultats).*

CHEVALLIER D.

I. *Mouvements d'une chaîne pesante.*

Ann. Ponts et Chaussées, Mai-Juin 1969.

II. *Etude géométrique de la dynamique des fils inextensibles.*

C.R..Acad. Sc. t. 270, pages 1562-1564.

III. *Etude de l'équation du mouvement d'un milieu continu dont la masse est une mesure positive quelconque.*

C.R. Acad. Sc. t. 272, pages 1188-1191.

EBIN — *The group of diffeomorphisms and Motion of fluids. Symposium on differential equations and dynamical systems.*

Lecture Notes in Mathematics (Vol. 206, Springer 71).

EBIN and MARSDEN — *On the Motion of incompressible Fluids.*

Actes du congrès International des Mathématiciens Nice (1972) (Gauthier-Villars).

FRÖLICHER and BUCHER

Calculus in vector spaces without norm.

Lecture Notes in Mathematics (Vol. 30, Springer 1966).

GODBILLON — *Géométrie différentielle et Mécanique Analytique.*

(Herman, 1969).

LANG — *Introduction aux variétés différentiables (DUNOD, 1967)*

LIONS — *I. Equations différentielles opérationnelles. (Springer, 1961).*
II. Problèmes aux limites non homogènes. (Dunod, 1968).

MARSDEN — *Hamiltonian one parameter groups. (Princeton University).*

MICHAL — *Calcul différentiel dans les espaces de Banach. (Gauthier-Villars).*

NOMIZU — *Lie groups and differential geometry. (Math. Soc. Japan).*

PALAIS — *I. Foundation of global non linear analysis. (Benjamin)*
II. Banach manifolds of fiber bundle sections.
Actes du congrès International des Mathématiciens. Nice 1970 (Gauthier-Villars).

-oOo-

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I :

§1. δ-fibrés vectoriels 10

§2. Variétés bimodelées 37

§3. La structure de variété bimodelée de $\tilde{T}'\Omega$ 68

§4. Application des variétés bimodelées en dynamique analytique des milieux continus 81

§5. Structures de variétés bimodelées sur les espaces de sections des fibres et sur les espaces d'applications d'une variété dans une variété. 91

CHAPITRE II :

§1. Introduction. 113

§2. Les structures de variétés bimodelées sur Ω. 118

§3. Les structures de variétés bimodelées sur Λ_η 133

§4. La sous-variété bimodelée Ω_1 de Ω. 141

§5. Les variétés bimodelées $\Omega^{r,k}$ et $\Lambda_\eta^{r,k}$ 150

CHAPITRE III :

APPLICATIONS A LA DYNAMIQUE ANALYTIQUE DES FILS 156

CHAPITRE IV :

MECANIQUE ANALYTIQUE DES MILIEUX CONTINUS CURVILIGNES . 169

§1. Description géométrique d'un milieu continu curviligne. 171

§2. Mécanique des milieux continus curvilignes. 178

Vu
Paris VI, le
Le Président du jury

Vu et permis d'imprimer
PARIS le